ELE-33: Aula de Exercícios 1
Data de Entrega 16/08/2004

Problema 1 Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios contidos em um espaço amostral S. Mostre que
a) $A = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup \overline{\overline{A} \cup B}$.
b) $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Problema 2 Seja $\{F_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, uma partição de um espaço amostral S. Mostre que $\{G \cap F_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, é uma partição para qualquer evento não-vazio $G \subset S$.

Problema 3 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ dois eventos não-vazios tais que $P(A) = P(B) = P(A \cap B)$. Mostre que, nesse caso,

$$P((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = 0,$$

ou seja, os eventos A e B são iguais com probabilidade 1.

Problema 4 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $E_1 \in \mathcal{F}$, $E_2 \in \mathcal{F}$ e $E_3 \in \mathcal{F}$, três eventos não-vazios arbitrários desse espaço de probabilidade.

a) Mostre que

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \ .$$

b) Mostre que, se E_1, E_2 e E_3 são eventos mutuamente independentes, então os eventos $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ e $\overline{E}_3$ também são mutuamente independentes, ou seja,
(i) $P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) = P(\overline{E}_1)\, P(\overline{E}_2)\, P(\overline{E}_1)$,
(ii) $P(\overline{E}_i \cap \overline{E}_j) = P(\overline{E}_i)\, P(\overline{E}_j) \qquad \forall 1 \leq i < j \leq 3$.

Problema 5 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ dois subconjuntos de S. Definindo-se a diferença $A - B = A \cap \overline{B}$, mostre que

$$B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Problema 6 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n \in \mathcal{F}$, uma seqüência de subconjuntos arbitrários (não necessariamente disjuntos) do espaço amostral S. Mostre que

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

<u>Sugestão:</u> Construa a seqüência auxiliar $\{B_n\}_{n \geq 1}$ onde

$$B_n = A_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k).$$

Problema 7 Seja $f{:}\Re \to \Re$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\, 1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad (1)$$

Seja agora $(\Re, \mathcal{B},\, P)$ um espaço de probabilidade onde $\Re$ é o conjunto dos números reais, $\mathcal{B}$ é o corpo Borel de $\Re$ e P é uma medida de probabilidade tal que, se $E \in \mathcal{B}$ é um conjunto no qual a função f é integrável segundo Riemann, tem-se

$$P(E) = \int_E f(x)dx \ .$$

a) Calcule a probabilidade dos eventos

a.1) $E_1 = [a,\, b]$, com $a < b$ reais arbitrários.

a.2) $E_2 = (-\infty, r]$, para qualquer $r \in \Re$.

b) Calcule a probabilidade do evento

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}} \right] \ .$$

Problema 8 Seja $\Re$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{B}$ o corpo Borel de $\Re$. Constrói-se o espaço de probabilidade $(\Re,\, \mathcal{B},\, P)$ onde P é uma medida válida de probabilidade satisfazendo os axiomas vistos em aula. Defina a seguir a função real F tal que

$$F(t') = P(\{t \leq t'\}) \qquad \forall t' \in \Re \qquad (2)$$

a) Expresse $P(\{t_1 < t \leq t_2\})$ e $P(\{t > t_2\})$ em termos da função F para quaisquer reais t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$.

b) Mostre que, se F for contínua à esquerda, i.e.

$$\lim_{\varepsilon \to 0_-} F(t + \varepsilon) = F(t),$$

então $P(\{a\}) = 0$ para qualquer $a \in \Re$.

c) Nas condições do item (b), calcule $P(Q)$ e $P(\overline{Q})$ onde Q é o conjunto dos números racionais.

Problema 9 Seja $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_k \in \mathcal{F}$, uma seqüência de eventos no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com probabilidades $p_n = P(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Defina a seguir o evento

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

a) Mostre que, dado $\xi \in E$, é possível construir uma seqüência enumerável infinita e crescente de números inteiros positivos $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < k_{i+1} < \ldots$ tal que $\xi \in A_{k_i}$, $\forall i \geq 1$.

b) Assumindo-se que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$, mostre que $P(E) = 0$ (**primeiro lema de Borel-Cantelli**).

<u>Dica:</u> Lembre-se de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k = 0.$$

Use ainda o fato de que, para uma seqüência $\{A_n\}$ arbitrária,

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \ .$$