ET-236: Lista de Revisão # 1

Problema 1 Seja $\{F_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, uma partição de um espaço amostral S. Mostre que $\{G \cap F_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, é uma partição para qualquer evento não-vazio $G \subset S$.

Problema 2 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ dois eventos não-vazios tais que $P(A) = P(B) = P(A \cap B)$. Mostre que, nesse caso,

$$P((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = 0,$$

ou seja, os eventos A e B são iguais com probabilidade 1.

Problema 3 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $E_1 \in \mathcal{F}$, $E_2 \in \mathcal{F}$ e $E_3 \in \mathcal{F}$, três eventos não-vazios arbitrários desse espaço de probabilidade.

a) Mostre que

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\ .$$

b) Mostre que, se E_1, E_2 e E_3 são eventos mutuamente independentes, então os eventos $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$ e $\overline{E}_3$ também são mutuamente independentes, ou seja,

(i) $P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3) = P(\overline{E}_1)\, P(\overline{E}_2)\, P(\overline{E}_1)$,

(ii) $P(\overline{E}_i \cap \overline{E}_j) = P(\overline{E}_i)\, P(\overline{E}_j) \qquad \forall 1 \leq i < j \leq 3$.

Problema 4 Seja S um espaço amostral, $\mathcal{F}$ uma sigma-álgebra de S e P uma medida de probabilidade $P : \mathcal{F} \to \Re$ satisfazendo

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall A \in F$, $B \in F$, $A \cap B = \emptyset$. (Aditividade finita)

(ii) Para qualquer seqüência decrescente $\{B_n\}_{n \geq 1}$ tal que $B_n \downarrow \emptyset$, tem-se $\lim_{n \to \infty} P(B_n) = 0$. (Continuidade no vazio)

Mostre que as duas condições acima implicam aditividade enumerável, ou seja,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \qquad \forall \{A_i\}_{i \geq 1}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Problema 5 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n \in \mathcal{F}$, uma seqüência de eventos arbitrários (não necessariamente disjuntos) do espaço amostral S. Mostre que

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Problema 6 Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n \in \mathcal{F}$, uma seqüência de eventos arbitrários do espaço amostral S. Defina a seguir o evento

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,.$$

a) Mostre que, dado $\xi \in E$, é possível construir uma seqüência enumerável infinita e crescente de números inteiros positivos $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < k_{i+1} < \ldots$ tal que $\xi \in A_{k_i}$, $\forall i \geq 1$.

b) Assumindo-se que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty$, mostre que $P(E) = 0$ (primeiro lema de Borel-Cantelli).

Dica: Lembre-se de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} p_k = 0.$$

Problema 7) Seja $(S, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e sejam $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ dois subconjuntos de S. Definindo-se a diferença $A - B = A \cap \overline{B}$, mostre que

$$B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B).$$

Problema 8 Seja f:$\Re \to \Re$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\, 1] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1}$$

Seja agora $(\Re, \mathcal{B},\, P)$ um espaço de probabilidade onde $\Re$ é o conjunto dos números reais, $\mathcal{B}$ é o corpo Borel de $\Re$ e P é uma medida de probabilidade tal que, se $E \in \mathcal{B}$ é um conjunto no qual a função f é integrável segundo Riemann, tem-se

$$P(E) = \int_E f(x)dx\ .$$

a) Calcule a probabilidade dos eventos

a.1) $E_1 = [a,\, b]$, com $a < b$ reais arbitrários.

a.2) $E_2 = (-\infty, r]$, para qualquer $r \in \Re$.

b) Calcule a probabilidade do evento

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{2n}},\, \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}}\right]\ .$$

Problema 9 Seja $\Re$ o conjunto dos números reais e $\mathcal{B}$ o corpo Borel de $\Re$. Constrói-se o espaço de probabilidade $(\Re,\, \mathcal{B},\, P)$ onde P é uma medida válida de probabilidade satisfazendo os axiomas vistos em aula. Defina a função real F tal que

$$F(t') = P(\{t \leq t'\}) \qquad \forall t' \in \Re \tag{2}$$

a) Expresse $P(\{t_1 < t \leq t_2\})$ e $P(\{t > t_2\})$ em termos da função F para quaisquer reais t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$.

b) Verifique que, se F for também contínua à esquerda, i.e.

$$\lim_{\varepsilon\to 0_-} F(t+\varepsilon) = F(t),$$

então $P(\{a\}) = 0$ para qualquer $a \in \Re$.

c) Nas condições do item (b), calcule $P(Q)$ e $P(\overline{Q})$ onde Q é o conjunto dos números racionais.

d) Seja agora $(\Re_+, \mathcal{B}(\Re_+), P)$ um espaço de probabilidade onde $\Re_+$ é o conjunto dos números reais não negativos, $\mathcal{B}(\Re_+)$ é o corpo Borel de $\Re_+$ e P é uma medida de probabilidade tal que a função F definida em (2) é dada por

$$F(t') = 1 - \exp(-ct') \qquad c > 0,\, t' \geq 0\ .$$

Defina nesse espaço de probabilidades os eventos $A = \{t_0 < t \leq t_0 + t_1\}$ e $B = \{t > t_0\}$. Mostre então que a probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = P(\{t \leq t_1\})\ .$$

Problema 10 Um símbolo X definido no alfabeto $\mathcal{T} = \{0,\, 1,\, 2\}$ é gerado com probabilidades a priori $P(\{X = i\}) = p_i$, $1 \leq i \leq 3$, e transmitido através de um canal de comunicação ternário. Devido à presença de ruído no canal, o símbolo Y recebido no receptor pode não coincidir com o símbolo X transmitido. O canal é especificado então por uma matriz de probabilidades de transição $\mathbf{T}$ tal que

$$T(i,j) = P(\{Y = i\} \mid \{X = j\}) \qquad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Assuma que, para um canal em particular,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\beta & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & 1-\gamma \end{bmatrix}.$$

onde α, β e γ são números reais no intervalo $(0, 1)$.

a) Calcule $P(\{X = i\} \mid \{Y = i\})$ para $i = 0,\, 1,\, 2$.

b) Particularize as expressões em (a) no caso em que $p_0 = p_1 = p_2$ e $\alpha = \beta = \gamma$. Interprete o seu resultado.

Problema 11 Em uma fábrica de chips, existem três máquinas A, B e C que fabricam respectivamente 25, 35 e 40 por cento do total de chips produzidos nessa planta industrial. Assuma que, nos lotes produzidos pelas máquinas A, B e C, respectivamente 5, 4 e 2 por cento dos chips são defeituosos. Um chip é escolhido aleatoriamente da produção combinada das três máquinas e verifica-se que ele apresenta defeito. Calcule a probabilidade de o chip amostrado ter sido fabricado pela máquina A.

Problema 12 Modela-se o tráfego de veículos através da cabine de um pedágio como um experimento aleatório onde a probabilidade do evento

$$A = \{n \ \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (t_1, t_2)\}$$

é dada por

$$P(A) = \exp\left[-\lambda(t_2 - t_1)\right] \frac{\left[\lambda(t_2 - t_1)\right]^n}{n!}$$

onde $T \geq t_2 > t_1 > 0$ e $\lambda > 0$. Assume-se ainda que, se (t_1, t_2) e (t_3, t_4) são intervalos disjuntos, então os eventos

$$A = \{n_1 \ \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } \ (t_1, t_2)\}$$

e

$$B = \{n_2 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (t_3,\, t_4)\}$$

são estatisticamente independentes. Defina em seguida os eventos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{n_1 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (0, t_1)\} \\ E_2 &= \{n_1 + n_2 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (0, T)\}\ . \end{aligned}$$

a) Calcule $P(E_1 \mid E_2)$.

b) A probabilidade calculada no item (a) depende do parâmetro λ ?

Problema 13 No mundo real, a probabilidade de um evento A associado a um experimento E com espaço amostral finito é freqüentemente calculada repetindo-se o experimento um número (usualmente grande) de vezes N e definindo-se

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \tag{3}$$

onde N_A é o número de ocorrências do evento A nas N repetições de E. Verifique que a definição (3) é compatível com os axiomas de positividade, normalização e aditividade finita para medidas de probabilidade.

Problema 14 (Gambler's Ruin) Dois jogadores A e B participam de um jogo com múltiplas rodadas consecutivas até que um deles vá à falência, ou seja, perca todo o seu capital . Suponha que o jogadores A e B comecem o jogo com capitais iniciais respectivamente a e b reais e que o perdedor pague 1 real para o vencedor em cada rodada. Assumindo-se que não existe um limite superior para o número de rodadas, seja $P_n = P(\{\text{o jogador A termina o jogo falido}\} \mid \{\text{ o capital do jogador } A \text{ é } n\})$, $0 < n < a+b$. Assuma ainda que os eventos {jogador A ganha uma rodada} e {jogador A perde uma rodada} são independentes do evento { o capital do jogador A é n}) e têm probabilidades respectivamente p e $q = 1 - p$.

a) Mostre que P_n, $0 < n < a + b$, satisfaz a equação de diferenças

$$P_n = p\, P_{n+1} + q\, P_{n-1} \tag{4}$$

com condições de contorno $P_0 = 1$ e $P_{a+b} = 0$.

b) Verifique que, para $p \neq q$,

$$P_n = \frac{(\frac{q}{p})^n - (\frac{q}{p})^{a+b}}{1 - (\frac{q}{p})^{a+b}} \tag{5}$$

é uma solução da equação (4).

c) Usando a expressão (5) no caso particular em que $n = a$, calcule a probabilidade de falência no final do jogo do jogador A quando $q > p$ e $b \to \infty$ (situação que ocorre por exemplo em cassinos e outros jogos de azar ilegais).