**ELE-33 Aula de Exercícios # 2**
**Data de Entrega: 30/08/2004**

**Problema 1** Seja $(\Re_+, \mathcal{B}(\Re_+), P)$ um espaço de probabilidade onde $\Re_+$ é o conjunto dos números reais não negativos, $\mathcal{B}(\Re_+)$ é o corpo Borel de $\Re_+$ e $P$ é uma medida de probabilidade tal que

$$F(t') = P(\{t \le t'\}) = 1 - \exp(-ct') \qquad c > 0,\, t' \ge 0 \; .$$

Defina a seguir nesse espaço de probabilidades os eventos $A = \{t_0 < t \le t_0 + t_1\}$ e $B = \{t > t_0\}$. Mostre então que a probabilidade condicional

$$P(A \mid B) = P(\{t \le t_1\}) \; .$$

**Problema 2** Um símbolo $X$ definido no alfabeto $\mathcal{T} = \{0,\, 1,\, 2\}$ é gerado com probabilidades a priori $P(\{X = i\}) = p_i$, $1 \le i \le 3$, e transmitido através de um canal de comunicação ternário. Devido à presença de ruído no canal, o símbolo $Y$ recebido no receptor pode não coincidir com o símbolo $X$ transmitido. O canal é especificado então por uma matriz de probabilidades de transição $\mathbf{T}$ tal que

$$T(i,j) = P(\{Y = i\} \mid \{X = j\}) \qquad 1 \le i, j \le 3.$$

Assuma que, para um canal em particular,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\beta}{2} & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\beta & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & 1-\gamma \end{bmatrix} .$$

onde $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são números reais no intervalo $(0, 1)$.

a) Calcule $P(\{X = i\} \mid \{Y = i\})$ para $i = 0,\, 1,\, 2$.

b) Particularize as expressões em (a) no caso em que $p_0 = p_1 = p_2$ e $\alpha = \beta = \gamma$. Interprete o seu resultado.

**Problema 3** Em uma fábrica de chips, existem três máquinas $A$, $B$ e $C$ que fabricam respectivamente 25, 35 e 40 por cento do total de chips produzidos nessa planta industrial. Assuma que, nos lotes produzidos pelas máquinas $A$, $B$ e $C$, respectivamente 5, 4 e 2 por cento dos chips são defeituosos. Um chip é escolhido aleatoriamente da produção combinada das três máquinas e verifica-se que ele apresenta defeito. Calcule a probabilidade de o chip amostrado ter sido fabricado pela máquina $A$.

**Problema 4** Modela-se o tráfego de veículos através da cabine de um pedágio como um experimento aleatório onde a probabilidade do evento

$$A = \{n \;\text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (t_1, t_2)\}$$

é dada por

$$P(A) = \exp\left[-\lambda(t_2 - t_1)\right] \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^n}{n!}$$

onde $T \geq t_2 > t_1 > 0$ e $\lambda > 0$. Assume-se ainda que, se $(t_1, t_2)$ e $(t_3, t_4)$ são intervalos disjuntos, então os eventos

$$A = \{n_1 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (t_1, t_2)\}$$

e

$$B = \{n_2 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (t_3,\, t_4)\}$$

são estatisticamente independentes. Defina em seguida os eventos

$$\begin{aligned} E_1 &= \{n_1 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (0, t_1)\} \\ E_2 &= \{n_1 + n_2 \text{ veículos passam pelo pedágio no intervalo } (0, T)\}\ . \end{aligned}$$

a) Calcule $P(E_1 \mid E_2)$.

b) A probabilidade calculada no item (a) depende do parâmetro $\lambda$ ?

**Problema 5** Dispõe-se em um experimento de uma moeda com duas faces distintas e uma moeda com duas caras. Escolhe-se ao acaso uma das duas moedas com igual probabilidade e lança-se então a moeda escolhida duas vezes. Calcule a probabilidade de a moeda escolhida ter sido a moeda de duas faces dado que duas caras são observadas nos dois lançamentos.

**Problema 6** Um jogador ganha 1 real se obtiver cara em dois lançamentos consecutivos de uma moeda; do contrário, o jogador perde 50 centavos. Se o experimento lançar a moeda duas vezes for repetido 50 vezes e as tentativas forem estatisticamente independentes entre si, calcule a probabilidade de que o ganho ou prejuízo líquido não exceda (a) 1 real, e (b) 5 reais.

**Problema 7** Seja $X$ uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função distribuição de probabilidade $F_X(x)$ contínua e diferenciável para qualquer $x \in \Re$ . Seja ainda $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X$. Defina em seguida a nova variável aleatória $Y = X^2$ tal que $Y$ é a função

$$\begin{aligned} Y\colon S &\rightarrow \Re \\ \xi &\rightarrow Y(\xi) = X^2(\xi) \end{aligned}$$

com $\{\xi \in S \colon X^2(\xi) \in B\} \in \mathcal{F}$ para qualquer evento $B$ no corpo Borel de $\Re$.

a) Escreva a função densidade de probabilidade $f_Y(y)$ da variável aleatória $Y$ em função da densidade de probabilidade $f_X(x)$ da variável $X$.

<u>Dica:</u> Note que, para $y > 0$, $P(\{Y \leq y\}) = P(\{X^2 \leq y\}) = P(\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\})$.

b) Particularize o resultado do item (a) quando $X$ é uma variável aleatória gaussiana $X \sim N(0, 1)$.

c) Calcule a seguir a função densidade de probabilidade da variável aleatória $Z = \sigma X + \mu$ com $\sigma > 0$

e $-\infty < \mu < \infty$ reais arbitrários e $X \sim N(0,1)$.

**Problema 8** Seja $f : \Re \to \Re_+$ uma função normal (gaussiana) tal que

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad \sigma > 0,\, m \in \Re\ .$$

Mostre que

a) $m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$.

b) $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\, f(x)\, dx$

**Problema 9** Seja $X$ uma variável aleatória real definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. Obtenha uma expressão para a função distribuição de probabilidade $F_X(x)$ da variável aleatória $X$ nos casos em que
a) $f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}) \qquad x \geq 0,\, \sigma > 0$ (Variável Rayleigh).

b) $f_X(x) = \frac{b}{\pi\,[(x-a)^2 + b^2]} \qquad b > 0, a \in \Re, x \in \Re$ (Variável Cauchy).