ET-236: Lista de RevisãO # 3

Problema 1 Uma fonte digital (binária) gera uma seqüência de amostras (realizações) de variáveis aleatórias discretas $\{X_n\}$, $n \geq 0$, com função massa de probabilidade $P_{X_n}(1) = P_{X_n}(-1) = 0.5$. Essa seqüência é transmitida através de um canal que adiciona a cada símbolo transmitido uma amostra da variável aleatória gaussiana $Y_n \sim N(0,1)$, assumida estatisticamente independente do evento $\{X_n = x\}$, ou seja,

$$F_{Y_n}(y_n \mid \{X_n = x\}) = P(\{Y_n \leq y\} \mid \{X_n = x\}) = P(\{Y_n \leq y\}) = F_{Y_n}(y_n).$$

Dado o modelo de canal com ruído aditivo descrito anteriormente, observa-se então na entrada do receptor uma seqüência de amostras das variáveis aleatórias contínuas $\{Z_n = X_n + Y_n\}$, $n \geq 0$.
a) Obtenha uma expressão para a função densidade de probabilidade da variável aleatória Z_n.

b) Dadas as amostras observadas da seqüência $\{Z_n\}$, o receptor gera então uma seqüência de amostras das variáveis aleatórias discretas $\{R_n = sgn(Z_n)\}$ onde

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} .$$

Seja D o evento $D = \{\text{detecção correta}\} = \{\{\{R_n = 1\} \cap \{X_n = 1\}\} \cup \{\{R_n = -1\} \cap \{X_n = -1\}\}\}$. Calcule $P(D)$ expressando o seu resultado em termos da função

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2}) .$$

Problema 2 Em um sistema de comunicação óptico, a luz emitida por um transmissor atinge um fotodetector gerando uma corrente elétrica. Assumindo-se que o transmissor use luz térmica, o número médio de elétrons condutores gerados no receptor por segundo é modelado como uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade exponencial

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Seja N o número efetivo de elétrons gerados por segundo no receptor. A probabilidade do evento $\{N = n\}$ condicionada a uma realização fixa do parâmetro aleatório X é dada por

$$P(\{N = n\} \mid \{X = x\}) = \frac{x^n}{n!} \exp(-x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

a) Calcule $P(\{N = n\})$.
<u>Dica:</u> Se preciso, use o fato de que

$$\int_0^\infty x^n \exp(-a\,x) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

para $a > 0$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Calcule a estimativa dita de máximo a posteriori do parâmetro aleatório X dado o evento $\{N = n\}$ definida como

$$\widehat{x}_{MAP} = \arg\max_{x} f_X(x \mid \{N = n\}) \ .$$

Observação: Note que, para efetuar a maximização acima, não é preciso calcular $P(\{N = n\})$.

Problema 3 Sejam X e N duas variáveis aleatórias independentes com funções densidade de probabilidade marginais respectivamente

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\,\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}) \\ f_N(n) &= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\,\pi}} \exp(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}) \end{aligned}$$

com $\sigma_x > 0$ e $\sigma_n > 0$. Defina em seguida a nova variável aleatória $Y = X + N$. Mostre que

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{1}{\sigma_p \sqrt{2\,\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_p^2} (x - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}\, y)^2 \right] \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\,(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{\sigma_p^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \ .$$

Problema 4 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas tal que

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi \mid \mathbf{\Sigma} \mid^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} [x - \mu_x \ \ y - \mu_y]\, \mathbf{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{bmatrix} \right\}$$

onde

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

com $\sigma_x > 0$ e $\sigma_y > 0$. Mostre que

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f_{XY}(x, y) dx\, dy \ . \tag{1}$$

Sugestão: Use a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} u &= (x - \mu_x) - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \mu_y) \\ v &= y - \mu_y \ . \end{aligned}$$

Problema 5 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas definidas no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = c \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \ .$$

a) Calcule o valor da constante c para que $f_{XY}(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade válida.

b) Calcule $P(\{(X,Y) \in A\})$ onde $A = \{(x,y) \in \Re^2 \mid x < y\}$.

c) Defina em seguida a nova variável aleatória $Z : S \to \Re$ tal que $Z = X + Y$. Calcule então a função densidade de probabilidade marginal $f_Z(z)$ da variável aleatória Z.

Sugestão: Verifique que X e Y são estatisticamente independentes e use o resultado mostrado em aula para o cálculo da função densidade de probabilidade da soma de duas variáveis aleatórias independentes.

d) Repita o item (c) definindo agora $Z = \max(X,Y)$ (sugestão: use o método indireto de cálculo de $f_Z(z)$).

Problema 6 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes com função densidade de probabilidade uniforme no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Defina a seguir a nova variável aleatória $Z = XY$ e calcule a função densidade de probabilidade $f_Z(z)$ de Z no intervalo $0 < z < \frac{1}{4}$.

Problema 7 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas e independentes com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x^2+y^2)\right\}$$

com $\sigma > 0$. Defina em seguida as novas variáveis aleatórias V e W tais que

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{X^2+Y^2} \qquad V \geq 0 \\ W &= \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) & X > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) + \pi & X < 0 \end{cases} \qquad 0 \leq W \leq 2\pi \end{aligned}$$

a) Calcule $f_{VW}(v,w)$, $f_W(w)$ e $f_V(v)$. O que se pode concluir a respeito das variáveis aleatórias V e W?

b) Repita o item (a) com as variáveis V e W definidas agora como

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{X^2+Y^2} \qquad V \geq 0 \\ W &= \frac{Y}{X}\,. \end{aligned}$$

Problema 8 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas independentes com funções massa de probabilidade marginais

$$P_X(k) = \frac{a^k}{k!}\exp(-a) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$P_Y(i) \quad = \quad \frac{b^i}{i!}\exp(-b) \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Mostre que a variável aleatória discreta $Z = X + Y$ tem função massa de probabilidade

$$P_Z(n) = \frac{(a+b)^n}{n!}\exp\{-(a+b)\} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Observação: Esse exercício demonstra a importante propriedade de que a soma de duas variáveis independentes de Poisson também é uma variável de Poisson.

Problema 9 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes definidas em um espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 \exp\left[-\lambda(x+y)\right] & x \geq 0,\, y \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3}$$

onde λ é um parâmetro real positivo. Calcule a função densidade de probabilidade $f_Z(z)$ das variáveis aleatórias

a) $Z = \frac{X}{X+Y}$ para $0 < z < 1$.

b) $Z = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}$, para $0 < z < 1$.

Problema 10 Um astrônomo deseja medir o brilho de uma estrela distante usando um equipamento de medidas com ruído. São efetuadas N medidas $\{x_k, k = 1, \ldots, N\}$ onde cada medida x_k é modelada como uma realização da variável aleatória

$$X_k = b + N_k$$

onde $\{N_k, k = 1, \ldots, N\}$ é uma seqüência de N variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância $\sigma^2 < \infty$, e b é o brilho real (determinístico) da estrela. Para reduzir o erro de estimação, o astrônomo calcula a média amostral

$$m_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N}$$

das N medidas e usa essa média como estimativa do brilho b.

a) Mostre que a estimativa calculada pelo astrônomo é não-enviesada e consistente, ou seja, definindo-se a variável aleatória

$$M_N = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_N}{N},$$

mostre que $E\{M_N\} = b$ e $\lim_{n\to\infty} \sigma^2_{M_N} = 0$.

b) Assumindo que $\sigma^2 = 4$, use a desigualdade de Chebyshev para obter um limite inferior para o número de medidas N de modo que a probabilidade de o erro absoluto de estimação ser menor do que 0.1 seja maior ou igual a 95%.

Problema 11 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas com função de probabilidade uniforme no intervalo $(0, 1)$.

a) Calcule as funções densidade de probabilidade conjunta e marginais das variáveis aleatórias

$$U = X + Y \tag{4}$$

$$V = X - Y \tag{5}$$

e conclua que as variáveis U e V não são independentes.

Dica: Note que, para quaisquer realizações x e y das variáveis X e Y, definindo-se $u = x+y$ e $v = x-y$, tem-se nesse caso que $0 < u < 2$, $-1 < v < 1$, $u + v < 2$, $u - v < 2$, e $|\, v \,| < u$.

b) Calcule a covariância das variáveis U e V em (4) e (5) nas hipóteses do item (a). Conclua que U e V nesse caso são descorrelacionadas.

Observação: Esse contra-exemplo ilustra que o fato de duas variáveis aleatórias serem descorrelacionadas não implica em geral que as mesmas sejam independentes.