ET-236: Lista de Exercícios #6

Problema 1 Suponha que a população de um país hipotético é dividida por nível de renda em três classes sociais, respectivamente,

Classe 1: Renda baixa.
Classe 2: Renda média.
Classe 3: Renda alta.

Assuma que a probabilidade de um indivíduo na geração n dessa população pertencer à classe social i, $i = 1, 2, 3$, é modelada por uma cadeia de Markov de primeira ordem com matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

onde $T(i, j)$ é a probabilidade de um indivíduo na geração atual pertencer à classe i dado que os seus pais pertenciam à classe j.

a) Calcule os autovalores da matriz $\mathbf{T}$.

b) Calcule o autovetor $\overline{\mathbf{p}}$ associado ao autovalor $\lambda = 1$, i.e., $\mathbf{T}\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}}$, com a restrição de que $\overline{p}_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, e

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{p}(i) = 1 \ .$$

c) Usando o resultado do item (b) e as propriedades de convergência de cadeias de Markov vistas em aula, calcule a porcentagem da população desse país hipotético que pertencerá à classe média no longo prazo e mostre que essa porcentagem independe da distribuição de renda inicial da população na geração zero (início da série de observações).

Problema 2 Seja $\{X_n\}$,$n \geq 0$, uma seqüência de variáveis aleatórias discretas assumindo valores no alfabeto finito $\mathcal{S} = \{1, 2\}$. Suponha ainda que a seqüência $\{X_n\}$ é modelada como uma cadeia de Markov de primeira ordem com $P(\{X_0 = 1\}) = \pi_1$, $P(\{X_0 = 2\}) = \pi_2$, e matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$$

invariante no tempo, com $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.

a) Calcule $P(\{X_n = i\})$, $i = 1, 2$ em função dos parâmetros α, β, π_1 e π_2.

b) Passando ao limite para $n \to \infty$, calcule a função massa de probabilidade estacionária, se existir, da cadeia $\{X_n\}$,$n \geq 0$.

Problema 3 Seja $\{X_n,\, n \geq 1\}$ uma cadeia de Markov de estado contínuo gerada pela equação de diferenças

$$X_{n+1} = X_n + W_n$$

onde $\{W_n, n \geq 0\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade $f_W(.)$, e $\{X_0\}$ é uma variável aleatória independente da seqüência $\{W_n, n \geq 0\}$ e com função densidade de probabilidade $\pi^{(0)}(.)$. Mostre que a função densidade de probabilidade $\pi^{(n)}(.)$ da variável aleatória X_n é dada por

$$\pi^{(n)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(y-x)\pi^{(0)}(x)\,dx$$

onde

$$f^{(n)}(y) = \underbrace{f_w(y) * f_w(y) * \ldots * f_w(y)}_{n\ vezes}.$$

Na equação acima, o símbolo $*$ denota a operação de convolução.

Problema 4 Seja $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ uma cadeia de Markov de primeira ordem com as variáveis aleatórias X_n assumindo valores no alfabeto finito $\mathcal{S} = \{S_1,\ S_2, \ldots, S_q\}$. Para $N > 0$ fixo, construa a seqüência reversa $\{Y_n = X_{N-n},\ n = 0, 1, \ldots, N\}$.

a) Mostre que $\{Y_n\}$ é também uma cadeia de Markov de primeira ordem, ou seja,

$$P(\{Y_n = y_n\} \mid \{Y_{n-1} = y_{n-1}\}, \{Y_{n-2} = y_{n-2}\}, \ldots, \{Y_0 = y_0\}) = P(\{Y_n = y_n\} \mid \{Y_{n-1} = y_{n-1}\}) \qquad n \geq 1$$

b) Suponha a seguir que a cadeia de Markov $\{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ é homogênea como probabilidades de transição

$$T(i,j) = P(\{X_{n+1} = S_i\} \mid \{X_n = S_j\}) = \begin{cases} Q(i,j)\alpha(i,j) & i \neq j \\ 1 - \sum_{k \neq i} Q(i,k)\alpha(i,k) & i = j \end{cases} \tag{2}$$

com $Q(i,j) > 0$, $\forall(i,j)$ e $\sum_{i=1}^{q} Q(i,j) = 1$ para qualquer $j = 1, \ldots, q$. Por outro lado, o termo $\alpha(i,j)$ em (2) é definido como

$$\alpha(i,j) = \min\left\{1,\ \frac{\pi(i)\,Q(j,i)}{\pi(j)\,Q(i,j)}\right\}$$

onde $\pi(i) > 0$, $i = 1, \ldots, q$ e $\sum_{i=1}^{q} \pi(i) = 1$. Mostre que π é uma distribuição estacionária da cadeia de Markov $\{X_n\}$, ou seja,

$$\pi(i) = \sum_{j=1}^{q} T(i,j)\,\pi(j)\ . \tag{3}$$

<u>Sugestão:</u> Mostre que

$$T(j,i)\pi(i) = T(i,j)\pi(j) \qquad \forall i,j = 1, 2, \ldots, q.$$

c) Mostre que, quando a cadeia de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ com probabilidades de transição como em (2) é inicializada com $P(\{X_0 = S_i\}) = \pi(i)$, então a cadeia reversa $\{Y_n\}$ definida como no item (a) é também homogênea com probabilidades de transição

$$P(\{Y_n = S_i\} \mid \{Y_{n-1} = S_j\}) = P(\{X_n = S_i\} \mid \{X_{n-1} = S_j\}) \qquad i, j = 1, \dots, q\,. \tag{4}$$

Problema 5 Seja $\{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov oculta de primeira ordem tal que a variável aleatória X_k para um $k \geq 0$ fixo assume valores no alfabeto finito $\mathcal{S} = \{S_1,\, S_2,\, \dots\, S_q\}$. Seja $\{\mathbf{Y}_n,\, n \geq 0\}$ uma seqüência de vetores aleatórios observados tal que, em geral, o vetor aleatório $\mathbf{Y}_k$ para um $k \geq 0$ pode assumir valores em $\Re^N$. Defina em seguida a função

$$I(x_k) = \max_{\mathbf{x}_{0:k-1}} P(\{\mathbf{X}_{0:k} = \mathbf{x}_{0:k}\} \mid \mathbf{y}_{0:k}) \tag{5}$$

para uma dada seqüência observada $\{\mathbf{y}_n,\, n \geq 0\}$. Assumindo que

$$\begin{aligned} P(\{X_n = x_n\} \mid \{X_{n-1} = x_{n-1}\}\,, \mathbf{y}_{0:n-1}) &= P(\{X_n = x_n\} \mid \{X_{n-1} = x_{n-1}\}) && n \geq 1 \\ f_{\mathbf{Y}_n|X_n, \mathbf{Y}_0^{n-1}}(\mathbf{y}_n \mid \{X_n = x_n\}\,, \mathbf{y}_{0:n-1}) &= f_{\mathbf{Y}_n|X_n}(\mathbf{y}_n \mid \{X_n = x_n\}) && n \geq 0\ , \end{aligned}$$

mostre que $I(x_k)$ pode ser calculada recursivamente para $k \geq 0$ pela expressão

$$I(x_{k+1}) = C_{k+1}\, f_{\mathbf{Y}_{k+1}|X_{k+1}}(\mathbf{y}_{k+1} \mid \{X_{k+1} = x_{k+1}\}) \max_{x_k} \left[P(\{X_{k+1} = x_{k+1}\} \mid \{X_k = x_k\})\, I(x_k)\right] \tag{6}$$

onde C_{k+1} é um termo que não depende de x_{k+1}. Como você inicializaria a recursão acima ?

Problema 5 Seja $\mathcal{S}$ uma fonte que gera a seqüência de símbolos $\{Z_n\}$ onde Z_n assume valores em $\mathcal{L} = \{0,\, 2,\, 4,\, 6,\, 8,\, 10\}$ com $P(\{Z_0 = 2i\}) = 1/6,\ i = 0, \dots, 5$ e $T(i,j) = P(\{Z_{n+1} = 2i\}\,, |\, \{Z_n = 2j\}),\ i, j = 0, \dots, 5$ tal que

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}\,. \tag{7}$$

a) Escreva um programa em MATLAB que simule a fonte $\mathcal{S}$ descrita acima.

b) Considere agora a seqüências de variáveis aleatórias $\{Y_n\}$, $n \geq 0$, tais que

$$Y_n = Z_n + W_n \tag{8}$$

onde $\{W_n\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância σ_w^2.

b.1) Dada uma realização observada $\{\mathbf{y}_{0:n}\}$ observada da seqüência $\{\mathbf{Y}_{0:n}\}$, escreva um programa em MATLAB para o cálculo recursivo de $P(\{Z_n = z_n\} \mid \mathbf{y}_{0:n})$ para todo $z_n \in \mathcal{L}$.

b.2) Usando os programas desenvolvidos, simule uma seqüência de 2000 símbolos z_n e 2000 observações y_n. Calcule recursivamente então a seqüência de estimativas MAP

$$\hat{z}_{n|n} = \arg\max_{z_n \in \mathcal{L}} P(\{Z_n = z_n\} \mid \mathbf{y}_{0:n}) \qquad n \geq 0 \tag{9}$$

assumindo-se respectivamente $\sigma_w = 0.3$, $\sigma_w = 0.5$, e $\sigma_w = 0.7$ Compare as seqüências $\{z_n\}$ e $\left\{\hat{z}_{n|n}\right\}$ para cada valor de σ_w fazendo uma contagem do número de erros de símbolo.