ET-236: Lista de Exercícios #7

Problema 1 Seja $X(t)$, $t \geq 0$, um processo estocástico complexo, não-estacionário e MS-contínuo com função de autocorrelação $R_{xx}(t_1, t_2)$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, e função média $m_x(t)$, $t \geq 0$. Seja $h : \Re \rightarrow \mathcal{C}$ uma função complexa tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$ e h é contínua para $t > 0$. Introduza a seguir o processo estocástico $Y(t)$ definido como a coleção indexada de variáveis aleatórias $\{Y_t,\, t \geq 0\}$ tal que

$$Y_t = \int_0^t h(t-\tau)\, X_\tau \, d\tau \qquad \text{(m.q.)} \tag{1}$$

a) Usando o critério de convergência de Cauchy, mostre que uma condição suficiente para a existência da integral MQ em (1) é que a integral dupla (no sentido de Riemann)

$$\int_0^t \int_0^t h(t-\tau) R_{xx}(\tau, \beta) h^*(t-\beta) d\tau d\beta < \infty \ . \tag{2}$$

b) Mostre em seguida que, quando a integral MQ em (1) existe, então

$$E\left[\int_0^t h(t-\tau)\, X_\tau \, d\tau\right] = \int_0^t h(t-\tau)\, E\left[X_\tau\right]\, d\tau = \int_0^t h(t-\tau)\, m_x(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

onde a integral à direita é uma integral de Riemann definida como no Cálculo convencional.

Problema 2 Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ dois processos estocásticos reais de média nula que se relacionam pela equação diferencial

$$Y'(t) + \alpha\, Y(t) = X(t) \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

Em (4), α é um número real <u>positivo</u> e a igualdade é interpretada no sentido MQ. Assuma a seguir que $X(t)$ e $Y(t)$ são *assintoticamente* conjuntamente estacionários em sentido amplo.

a) Mostre que, na condição de estacionariedade conjunta (ou seja, após um tempo suficiente longo de observação dos processos $Y(t)$ e $X(t)$), tem-se

$$\begin{aligned} R_{y'\,y}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} R_{yy}(\tau) && (5) \\ R_{y'\,x}(\tau) &= \frac{d}{d\tau} R_{yx}(\tau)\ . && (6) \end{aligned}$$

b) Usando (5) e (6), mostre que $R_{yy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ satisfazem as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} R_{yx}(\tau) + \alpha\, R_{yx}(\tau) &= R_{xx}(\tau) && (7) \\ \frac{d}{d\tau} R_{yy}(\tau) + \alpha\, R_{yy}(\tau) &= R_{xy}(\tau)\ . && (8) \end{aligned}$$

Problema 3 Seja $X(t)$ um processo ruído branco com $R_{xx}(\tau) = 5\delta(\tau)$ e seja $Y(t)$ a resposta à excitação $X(t)$ do sistema linear invariante no tempo $\mathcal{H}$ descrito pela equação diferencial

$$y''(t) + 7\,y'(t) + 10y(t) = x(t).$$

Na situação de estacionariedade conjunta em sentido amplo dos processos $X(t)$ e $Y(t)$, calcule $R_{yy}(\tau)$ e $E\left\{Y^2(t)\right\}$.

Problem 4 Seja $\mathcal{H}$ um sistema linear de tempo discreto invariante a deslocamento com resposta ao pulso unitário $h\,[l] = a^l\,u\,[l]$ onde a é uma constante real de módulo menor do que 1 e $u\,[l]$ denota a seqüência degrau unitário. Assuma a seguir que o sistema $\mathcal{H}$ é excitado por uma processo estocástico de tempo discreto $X\,[n]$, estacionário em sentido amplo com média zero e função de autocorrelação

$$R_{xx}\,[l] = \frac{\sigma^2}{1-b^2}\, b^{|l|} \qquad l \in \mathcal{Z}$$

onde σ^2 e b são constantes reais e $\mid b \mid < 1$. Usando a somatória de convolução, calcule a função de autocorrelação

$$R_{yy}\,[l] = (h\,[l] * h^*[-l]) * R_{xx}[l]$$

do processo assintoticamente estacionário em sentido amplo $Y\,[n]$ obtido como a resposta de longo prazo do sistema linear $\mathcal{H}$ à excitação estocástica $X\,[n]$.