

## Redes Neurais de Hopfield como Ferramenta de Otimização Aplicado ao Despacho Hidrotérmico

Ronaldo R. B. de Aquino<sup>1</sup>, Manoel Afonso de Carvalho Jr.<sup>2</sup>, Benemar Alencar de Souza<sup>3</sup>

<sup>1</sup> UFPE/ Doutorando UFPB - UFPE/CTG/DEESP -Av Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária Recife-PE Brasil CEP : 50740-530 Fone/Fax : 55 -81 -2718256

<sup>2</sup> UFPE - UFPE/CTG/DEESP -Av Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária Recife-PE Brasil CEP : 50740-530 Fone/Fax : 55 -81 -2718256

<sup>3</sup> UFPB-UFPB/CCT/COPELE- Av Aprigio Veloso ,882-Bodocongó -Campina Grande -PB Brasil CEP: 58109-970 Fone/Fax: 55-83- 3101015

E-mails: rrba@npd.ufpe.br, macj@npd.ufpe.br, benemar@dee.ufpb.br

### Abstract

*This paper presents an application of the Artificial Neural Networks (ANN) to solve the hydrothermal generation system dispatch problem. The ANN here used is the recurrent networks of "Hopfield and Tank" after be improved by "Kennedy and Chua".*

*The dispatch problem is modeled as a linear programming problem (LPP) where the constrain matrix represents the energy balance and the objective function search the minimum operation cost. The LPP is solved as a dynamic problem through analogs circuits as proposed by "Kennedy and Chua".*

### 1. Introdução

As redes neurais de Hopfield vem sendo utilizadas em problemas de otimização inicialmente pelo próprio Hopfield em 1985 [12] resolvendo um problema de otimização combinatória (conhecido como o problema do caixeiro viajante) e posteriormente em 1986 [13] onde é resolvido um problema de programação linear (PPL) como um problema dinâmico através de um circuito analógico baseado em amplificadores operacionais como neurônios. Contudo foi mostrado por "Kennedy e Chua" [7], [8] que esta formulação não conduziria sempre a valores estáveis, e por outro lado sugeriram uma alternativa baseada no modelo original de Hopfield que resolve problemas de PPL e programação quadrática (PQ).

É importante notar que a busca pela representação de problemas de programação linear através de circuitos elétricos analógicos teve início na década de 50 com Pyne[19] no seu artigo "Linear Programming on an electronic analogue computer" de 1956, menos de dez anos após a criação da Programação linear por G. B. Dantzig em 1947, e depois seguiram-se os artigos [20,12,13,22,7,8,23].

As aplicações na área de despacho de sistemas hidrotérmicos iniciaram-se em 90 e continuam até agora como pode-se ver nas referências [16] a [18].

### 2. Modelo de Despacho Hidrotérmico de Geração

Este modelo de despacho hidrotérmico realiza a otimização da operação de sistemas de hidrotérmicos de geração interligados eletricamente objetivando atendimento ao mercado de energia elétrica [3], [4].

#### 2.1 Formulação Matemática Problema de Balanço de Energia

As equações de balanço de energia eqs.(1) e (2) estabelecem como a carga está sendo atendida; se por geração hidráulica, geração térmica, energia importada de outro subsistema ou, se a carga não for suprida ocorre o deficit. Observe que cada subsistema tem uma equação de balanço de energia, que tem em comum o fluxo de energia entre os subsistemas.

$$\sum_{i=1}^{NH_k} GH_k(i) + \sum_{j=1}^{NT_k} GT_k(j) + DEF_k - EXP_{12} + EXP_{21} = L_k \quad (1)$$

onde:

$GT_k(j)$ , é a produção da  $j^{\text{ésima}}$  usina térmica do subsistema  $k$ .

$GH_k(j)$  é a produção da  $j^{\text{ésima}}$  usina hidroelétrica do subsistema  $k$ .

$EXP_{12}$  é o fluxo de energia do subsistema 1 para o 2.

$EXP_{21}$  é o fluxo de energia do subsistema 2 para o 1.

$DEF_k$  é o deficit de energia do subsistema  $k$ .

$L_k$  é a carga do subsistema  $k$ .

$NH_k$  é o número de usinas hidroelétricas do subsistema  $k$ .

$NT_k$  é o número de usinas térmicas do subsistema  $k$ .

Na equação de balanço energético mostrada anteriormente também são considerados os limites de geração hidráulica, geração térmica e de fluxo de energia.

## 2.2 Função Objetivo

A qual busca minimizar o custo de operação .

$$\min(\sum_{j=1}^{NHk} (CH_k(j) \times GH_k(j)) + \sum_{j=1}^{NTk} (CT_k(j) \times GT_k(j)) + CDEF_k \times DEF_k) \quad (2)$$

onde :

CT é o custo do combustível para a geração térmica .  
CDEF é o custo do deficit de energia.

## 3. Redes Neurais Aplicada a Programação Linear

O modelo contínuo inicialmente apresentado por Hopfield é capaz de resolver problemas do tipo otimização combinatória como mostrado na referência [12], contudo o problema prático que estamos interessado em solucionar é um problema de Programação Linear (PL) ou Não linear Quadrática (PNL, ou PQ), advindo da modelagem do despacho hidrotérmico econômico .

### 3.1. Rede Neural de Hopfield para Problemas de Programação Linear

Seja o problema de programação linear (LP) na forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(v) &= a^T v \\ \text{s.a } g(v) &= Dv - b \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

onde ,  $D$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$ , e  $n \in \mathbf{R}^n$  .

A rede neural proposta por “Hopfield e Tank” [13] para resolver o PPL (3) é mostrada na Fig. 1. As saídas dos  $n$  amplificadores no lado esquerdo corresponde ao vetor variável  $v$  do PPL (“amplificadores variáveis”), cuja entrada resultante é chamada de  $x_i$ ; as correntes correspondem aos elementos  $a$  que alimentam tais amplificadores. Os  $m$  amplificadores no lado direito representam as restrições de inequações (“amplificadores restrições”) ; A entrada resultante  $x_j$  para cada amplificador é a soma de uma corrente constante proporcional ao limite  $b_j$  e uma corrente igual ao produto do “amplificador variável”  $i$ -ésimo multiplicada pelo coeficiente  $d_{ji}$ . A saída do  $j$ -ésimo “amplificador restrição” é multiplicada pelo  $d_{ji}$  e alimenta o  $i$ -ésimo “amplificador variável”. As relações entre os amplificadores são expressas por:

< Amplificador Variável >

$$v_i = h(x_i) ; \quad (4)$$

$$h(x_i) = \frac{1}{2} (1 + \tanh(kx_i)) \quad (5)$$

< Amplificador Restrição >

$$y_j = g^-(x_j) ; x_j = d_{j.} v - b_j \quad (6)$$

$$\begin{cases} g^-(x_j) = 0 & \text{se } x_j \geq 0 \\ g^-(x_j) = -x_j & \text{se } x_j < 0 \end{cases} \quad (7)$$

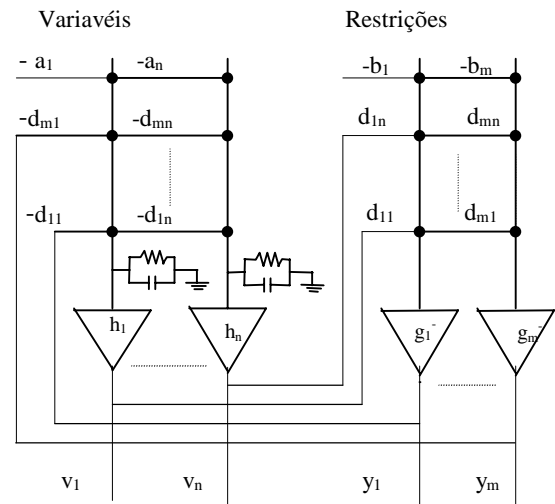


Figura 1. Rede Neural “Hopfield e Tank” para Resolver PPL.

onde,  $d_{j.} = [d_{j1}, d_{j2}, \dots, d_{jn}]^T$ ,  $k$  é uma constante positiva e a função  $g^-$  é tal que dá uma saída elevada quando a restrição correspondente não é satisfeita. Deve-se notar que os “amplificadores restrição” devem ter um tempo de resposta menor (ser mais rápido) que os “amplificadores variáveis”. Embora esta rede neural tenha conexões assimétricas ele converge para um dos seus mínimos dado que a função inversa da função característica entrada-saída de cada “amplificador variável” é monotonamente crescente. Assumindo desprezível o tempo de resposta de  $y_j$  comparado com a dos amplificadores variáveis, então a equação do circuito dos amplificadores variáveis escreve-se como;

$$C_i \frac{dx_i}{dt} = -a_i - \frac{x_i}{R_i} - \sum_j D_{ji} g_j^-(x_j) \quad (8)$$

$$C_i \frac{dx_i}{dt} = -a_i - \frac{x_i}{R_i} - \sum_j D_{ji} g_j^-(d_{j.} v - b_j) \quad (9)$$

Considere agora a seguinte função de energia

$$E = a^T v + \sum_j G_j^- (d_j v - b_j) + \sum_i \frac{1}{R_i} \int_0^v h^{-1}(v) dv \quad (10)$$

$$\text{onde; } g_j^-(x) = \frac{dG_j^-(x)}{dx}$$

Então derivando no tempo,

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \left[ \frac{x_i}{R_i} + a_i + \sum_j D_{ji} g_j^-(d_j v - b_j) \right] \quad (11)$$

Porém substituindo o termo entre parenteses pela eq.(9) obtém-se

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} = - \sum_i C_i h^{-1}(v_i) \left( \frac{dv_i}{dt} \right)^2 \quad (12)$$

Como  $C_i$  é positivo e  $h^{-1}(v_i)$  é monotonicamente crescente esta soma é não negativa e

$$\frac{dE}{dt} \leq 0; \quad \text{quando } \frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_i}{dt} = 0; \quad \forall i$$

Então como também foi mostrado para a rede da Fig. 1 a evolução no tempo do sistema é um movimento no espaço de estados em busca do mínimo de E, onde para.

### 3.2. Rede Neural de Hopfield para PPL – Modificada por “Kennedy e Chua”

“Kennedy e Chua” em [7] demonstram que a função energia proposta anteriormente apesar de buscar o mínimo não é limitada inferiormente, logo na modelagem com AOP (amplificador operacional) ideal o valor obtido seria infinito e no caso do AOP real seria o valor de saturação do AOP. Também mostraram que este problema seria resolvido escolhendo-se apropriadamente a função  $g^-(.)$ . Já em [8] mostram um novo circuito para resolver problemas de programação linear e quadrática. A função  $g^-(.)$  proposta por “Kennedy e Chua” em [7] foi,

$$\begin{cases} g^-(x_j) = 0 & \text{se } x_j \geq 0 \\ g^-(x_j) = \frac{1}{R} \cdot x_j & \text{se } x_j < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Os circuitos propostos por “Kennedy e Chua” em [7] para programação linear e em [8] para programação quadrática e também para programação não linear genérica foram baseados na teoria de circuitos desenvolvida em [20,21,24], denominada “canonical nonlinear programming circuit”, a qual é baseada condições de “Kuhn--Tucker” da teoria de programação matemática. Sendo assim, tais circuitos simulam a solução de problemas de programação não linear genérica através de circuitos e que tem seu circuito analógico mostrado em [22].

Considere agora o caso da programação quadrática na forma,

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(v) &= \frac{1}{2} v^T G v + a^T v \\ \text{s.a } g(v) &= D v - b \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $G$  é uma matriz simétrica, positiva semi-definida

O circuito apresentado em [8] aplica-se tanto a PL como a PQ, já que PL é um caso especial de PQ quando a matriz  $G$  é nula.

Como na rede neural proposta por “Hopfield e Tank” [13] para resolver o PPL eq. (3) e mostrada na Fig. 1, a rede neural de Hopfield modificada por “Kennedy e Chua” aplicada a problemas de PL e PQ mostrada na Fig. 2 possui circuitos amplificadores variáveis e restrições.

As saídas dos  $n$  amplificadores do lado esquerdo correspondem ao vetor variável  $v$  do PPL e PPQ (“amplificadores variáveis”), cuja entrada resultante é chamada de  $x_i$ ; as correntes constantes correspondem aos elementos do vetor  $a$  que alimentam tais amplificadores. Os  $m$  amplificadores do lado direito representam as restrições de inequações (“amplificadores restrições”). A entrada resultante  $x_j$  para cada amplificador é a soma de uma corrente constante proporcional ao limite  $b_j$  e uma corrente igual ao produto do “amplificador variável”  $i$ -ésimo multiplicada pelo coeficiente  $d_{ji}$ . A saída do  $j$ -ésimo “amplificador restrição” é multiplicada pelo  $d_{ji}$  e alimenta o  $i$ -ésimo “amplificador variável” juntamente com o vetor  $a$ . As relações entre os amplificadores são expressas por:

< Amplificador Variável ou Integrador >

$$v_i = K \int_0^t x_i dt \quad (15)$$

< Amplificador Restrição >

$$y_j = g^-(x_j); \quad x_j = d_j \cdot v - b_j \quad (16)$$

$$\begin{cases} g^-(x_j) = 0 & \text{se } x_j \geq 0 \\ g^-(x_j) = \frac{1}{R} x_j & \text{se } x_j < 0 \end{cases} \quad (17)$$

onde,  $d_j = [d_{j1}, d_{j2}, \dots, d_{jn}]^T$ ,  $K$  é uma constante positiva e a função  $g^-$  é tal que dá uma saída elevada quando a restrição correspondente não é satisfeita. Deve-se notar que os “amplificadores restrição” devem ter um tempo de resposta menor (ser mais rápido) que os “amplificadores variáveis”. Assumindo desprezível o tempo de resposta de  $y_j$  comparado com a dos amplificadores variáveis, então a equação do circuito dos amplificadores variáveis escreve-se como;

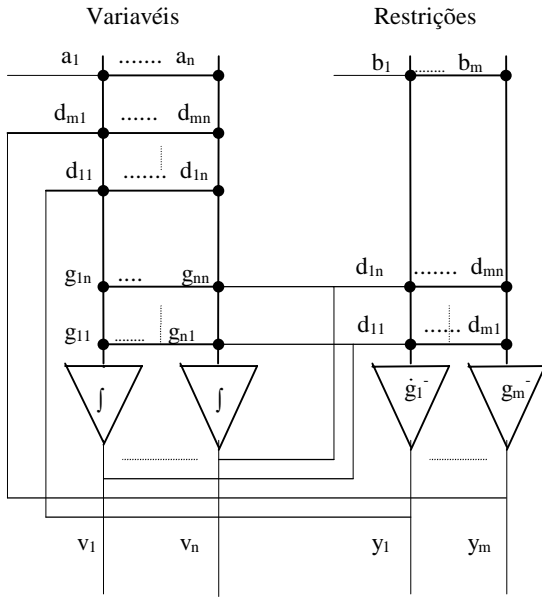


Figura 2. Rede Neural de Hopfield-Modificada por “Kennedy e Chua” aplicada a PL e PQ

$$C_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{df(v)}{dv_i} - \sum_j y_j \frac{dg_j^-(x_j)}{dv} \quad (18)$$

onde,  $y_j = g_j^-(g(v))$

$$C_i \frac{dv_i}{dt} = -a - Gv_i - \sum_j g_j^-(d_j v - b_j) D_{ji} \quad (19)$$

Considere agora a seguinte função de energia,

$$E(v) = f(v) + \sum_{j=1}^m \int_0^{g_j^+(v)} g_j^-(x) dx \quad (20)$$

Tomando a derivada de  $E(v)$  no tempo, e usando o fato de que  $y_j = g_j^-(g(v))$  obtém-se,

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{df(v)}{dv_i} \frac{dv_i}{dt} + \sum_j \sum_i g_j^-(g(v)) \frac{dg_j^-(v_i)}{dv_i} \frac{dv_i}{dt}$$

ou,

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \left[ \frac{df(v)}{dv_i} + \sum_j g_j^-(g(v)) \frac{dg_j^-(v_i)}{dv_i} \right] \quad (21)$$

Porém, substituindo-se o termo entre parenteses pela eq.(82) obtém-se,

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_i C_i \left( \frac{dv_i}{dt} \right)^2 \quad (22)$$

Como  $C_i$  é positivo esta soma é não negativa então,

$$\frac{dE}{dt} \leq 0;$$

Então como também foi mostrado para a rede da Fig. 1 a evolução no tempo do sistema é um movimento no espaço de estados em busca do mínimo de  $E$  e então para.

Logo  $E$  é uma função Lyapunov para o sistema sendo o sistema estável em  $\tilde{v}$  quando,

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad \forall i$$

### 3.3 Algoritmo Neural para Programação Linear

Seja o problema de programação linear (LP) na forma

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(x) &= a^T v \\ \text{s.a } g(x) &= Dv - b \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $D$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$ ,  $a \in \mathbf{R}^n$ , e  $n \in \mathbf{R}^n$ , e caso existam igualdades serão tratados como duas inequações e a formulação aqui mostrada permanece. Observe que  $\nabla f(v) = a$  e  $\nabla g(x) = D^T$ .

Define-se:  $g^+(v) = \max\{0, g_i(v)\}$ , cuja notação foi simplificada para  $g^+ = [g_1^+ \dots g_m^+]^T$ , de acordo com [5].

Para o caso em que  $g(v) = Dv - b \geq 0$ , tem-se  $g^-(v) = \min\{0, -g_i(v)\}$ , como mostrado em [6]. Usaremos neste artigo  $g^+(v)$ , para o algoritmo de solução.

O modelo de "Kennedy e Chua" [7, 8] usa integradores como componentes básicos. Esta modificação requer um "hardware" adicional para tornar o integrador nas implementações analógicas. O modelo é descrito pela equação:

$$\dot{v} = C^{-1} \{-\nabla f(v) - s \nabla g(v) \cdot g^+(v)\} \quad (24)$$

onde  $C$  é uma matriz diagonal  $n \times n$  oriunda da capacitância própria do neurônio. A qual normalmente é tomada como a matriz identidade. A função correspondente de energia é,

$$E(v) = f(v) + \frac{s}{2} \sum_{j=1}^m (g_j^+(v))^2 \quad (25)$$

a qual foi provado por "Kennedy e Chua" [7], [8] ser uma função "Lyapunov" para o sistema de equações dado por (24). O que garante a convergência do sistema para um ponto estável de equilíbrio sem oscilações.

Tomando  $C$  como a Matriz identidade em (24) obtém-se,

$$\dot{v} = -\nabla f(v) - s \left[ \sum_{j=1}^m g_j^+(v) \nabla g_j(v) \right] \quad (26)$$

Cujo diagrama de Bloco do processo iterativo de solução de (26) é mostrado na Fig. 3.

Para um PPL  $f(v)$  e  $(g^+(v))^2$  são convexas e continuamente diferenciável, como é  $E(v)$ , então

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dE}{dv_j} \frac{dv_j}{dt} = \dot{v}^T \left[ \nabla f(v) + s \sum_{j=1}^m g_j^+(v) \nabla g_j(v) \right] = -\dot{v}^T \cdot \dot{v} \leq 0$$

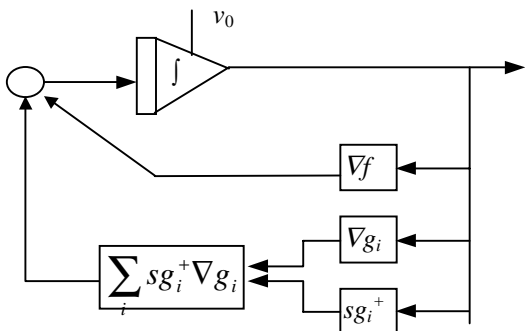


Figura 3 Diagrama de Bloco do Sistema Dinâmico Eq.(26).

Onde a igualdade ocorrerá apenas no equilíbrio  $\tilde{v}$  da Eq. (26). Então se o PPL tem um valor ótimo,  $E(v)$  é uma função de “Lyapunov” para (26) cujo mínimo será atingido em  $\tilde{v}$ .

#### 4. Estudo de Casos

Para avaliar-se o desempenho desta metodologia em um despacho hidrotérmico, como modelado no item 2, realizamos duas simulações onde representamos o sistema interligado Chesf /Eletronorte ( em um caso fictício) composto pelas usinas hidroelétricas de Sobradinho, Itaparica, Paulo Afonso, Xingó na Chesf e Tucuruí na Eletronorte e também duas usinas térmicas uma em cada sistema para o atendimento de um mercado de ponta.

Tabela 1. Mercado de Ponta- MW

	Chesf	Eletronorte
caso 1	8264	3064
caso 2	9264	4064

Partindo-se dos dados das Tabs. 1 e 2 montamos dois casos exemplos um para cada valor de mercado dos Sistemas Chesf e Eletronorte de acordo com a formulação mostrada no item 2 . Como trata-se de um PPL este foi resolvido de acordo com a eq. (26), cujo diagrama de bloco apresenta-se na Fig. 3.

Tabela 2

Dados das Usinas (MW) ,Custos(US\$/Mw) ,Limites das Variáveis

	mínimo	máximo	custos
Ger. Sob. (v1)	350	1050	15
Ger. Itap. (v2)	500	1500	15
Ger. P. Af. (v3)	1230	4424	0
Ger. Xin.. (v4)	1200	3000	0
Ger. B. Esp. (v5)	63	232	0
Ger. Tuc. (v6)	990	3960	0
Int. Che-El. (v7)	0	1500	30
Int. El –Che. (v8)	0	1500	30
Ger. T. Che. (v9)	6	253	70
Ger. T. Eln. (v10)	0	73	90
Def. Che. (v11)	0	2000	200
Def. Eln. (v12)	0	1000	200

Para simularmos o problema da eq.(26) elaboramos uma programa computacional utilizando o MATLAB do qual também utilizamos a função “ode45” a qual soluciona a equação diferencial pelo método de “Runge –Kutta” de 4ª ordem. Na simulação utilizamos como valor inicial das variáveis no processo iterativo o seu valor mínimo, e estabelecemos como valor razoável  $s=100$ .

Tabela 3 Resultados  
CASO 1 CASO 2

	RNA	Simplex	RNA	Simplex
Ger Sob.	349.8	350	629.4	350
Ger Itap.	499.8	499	1079.5	1356
Ger P Af	4179.0	4176	4424.2	4424
Ger Xin.	3000.0	3000	3000.0	3000
G. B. Esp	232.0	232	232.1	232
Ger Tuc.	3066.9	3064	3960	3960
I. Ch.-El.	-0.2	0	-0.5	0
I. El–Ch.	-0.3	0	104.4	104
G.T. Ch.	5.3	6	5.4	6
G.T. Eln.	-0.9	0	-0.45	0
Def. Che.	1.9	0	-1.84	0
Def. Eln.	2.0	0	-1.55	0

Os resultados das simulações são mostrados na Tab.3 onde podemos comparar os valores obtidos pela RNA com aqueles do método tradicional (Simplex). Já nas Figs. 5 e 6 vemos o comportamento dinâmico das variáveis.

#### 5 . Análise dos Resultados

Comparando os resultados do caso 1 (RNA x SIMPLEX) temos apenas diferenças de precisão dos resultados o que é inerente ao método iterativo, ressaltando-se que do ponto de vista prático os resultados são idênticos. Já no caso 2 vemos uma diferença aparente entre os resultados das usinas de Sobradinho e Itaparica , a qual ocorre apenas porque as duas têm o mesmo custo.

Analisando-se o caso 1 em relação ao 2 vemos que a modelagem via RNA responde corretamente ao aumento da carga viabilizando o aumento da geração de menor custo.

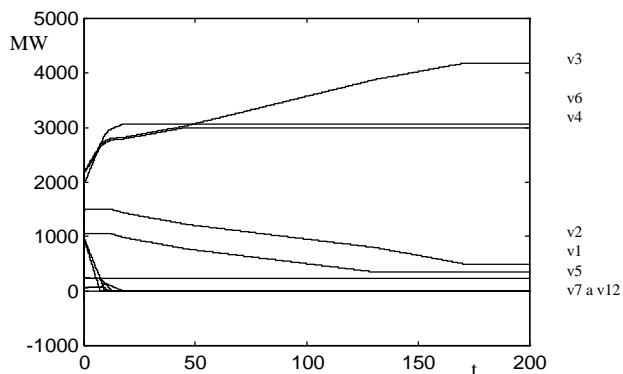


Figura 4. Caso 1

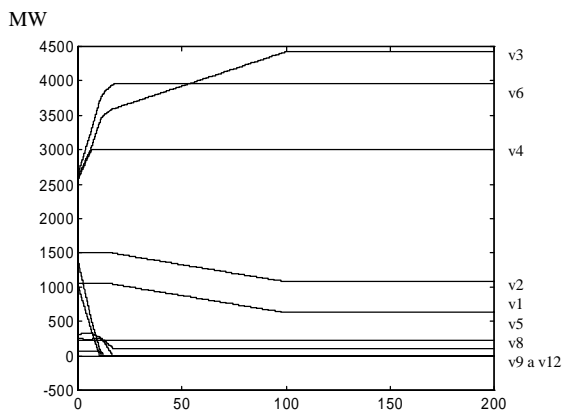


Figura 5. Caso 2

## 6. Conclusões

Os resultados obtidos neste artigo demonstram a implementação correta da metodologia proposta no item 3 a qual foi aplicada com êxito ao despacho hidrotérmico obtendo-se resultados satisfatórios.

A utilização de técnicas tradicionais de PL e PQ implementadas em softwares são mais rápidas que as redes de Hopfield dado que estas envolvem um processo iterativo com a solução de um sistema de equações diferenciais mostrados em [5] e [6]. Porém ao trabalharmos esta nova ferramenta estamos investindo numa metodologia que tem ampla capacidade de implementação em “hardware”, e sendo assim, será mais rápida e eficiente.

## Referências

[1] “MATLAB, Neural Network Toolbox”, 1994  
 [2] Ronaldo R. B. Aquino., Redes Neurais de Hopfield como ferramenta de otimização Aplicado ao Despacho Hidrotérmico ,Projeto de Pesquisa 3, UFPB/COPELE, Mar/1999.  
 [3] Ronaldo R. B. Aquino., Manoel A Carvalho Jr., Modelo de Otimização da Operação Hidrotérmica do Sistema Interligado Chesf/Eletronorte ,XIV CILAMCE pp 533-542, 1993.  
 [4] Ronaldo R. B. Aquino., Manoel A Carvalho Jr., Benemar Alencar de Souza ,The Water Resources Multiple Use Impact in the Operation Planning of Hydrothermal Generation Systems ,VI SEPOPE, 1998.  
 [5] Chia-Yiu Maa, Michael A. Shanblatt ,1992. “Linear and Quadratic Programming Neural Network Analysis”, IEEE Trans. on Neural Networks ,Vol 3, No 4 ,July 1992 , pp 580-594.  
 [6] Stanislaw H. Zak, Viriya Upatising, and Stefen Hui ,1995. “Solving Linear Programming Problems with Neural Networks: A Comparative Study”, IEEE Trans. on Neural Networks ,Vol 6, No 1 ,January 1995 , pp 94-104.  
 [7] Michael Peter Kennedy and Leon O. Chua ,1987. “Unifying Tank and Hopfield Linear Programming Circuit and the Canonical Nonlinear Programming Circuit of Chua and Lin”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-34, No 2 ,February 1987 , pp 210-214.  
 [8] Michael Peter Kennedy and Leon O. Chua ,1988. “Neural Networks for Nonlinear Programming”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-35, No 5 ,February 1988 , pp 210-214.

[9] Andrzej Cichocki and Rolf Unbehauen ,1992. “Neural Networks for Solving Systems of Linear Equations and Related Problems”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems-I, Vol -39, No 2 ,February 1992 , pp 124-138.  
 [10] J.J. Hopfield , 1982, “Neural networks and phisycal systems with emergente collective computational abilites” , Proc. Natl. Acad. Sci. USA ,Vol. 79, pp. 2552-2558 ,April 1982.  
 [11] J.J. Hopfield , 1984, “Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons” , Proc. Natl. Acad. Sci. USA ,Vol. 81, pp. 3088-3092 ,May 1984.  
 [12] J.J. Hopfield , D.W. Tank ,1985 “Neural Computation of Decisions in Optimization Problem ”, Biological Cybernetics ,52, pp. 141-152 , 1985.  
 [13] D.W. Tank, J.J. Hopfield ,1986, “Simple ‘Neural’ Optimization Networks:An A/D Converter ,Signal Decision Circuit , and a Linear Programming Circuit ” , IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol-CAS-33, No 5 ,May 1986, pp 533- 541.  
 [14] H. Sasaki , M. Watanabe, J. Kubokawa , N. Yorino , R. Yokoyama, 1992, “A Solution Method of Unit Commitment by Artificial Neural Networks”, IEEE Transc. on Power Systems ,Vol 7, No 3 , August 1992, pp 974-981.  
 [15] J.H. Park ,Y.S. Kim , I.K. Eom ,K.Y.Lee , 1993, “Economic Load Dispatch for Piecewise Quadratic Cost Function Using Hopfield Neural Network”, IEEE Transc. on Power Systems ,Vol 8, No 3, August 1993, pp 1030-1038.  
 [16] R.H. Liang ,Y.Y.Hsu 1996. “ Short-term Hydro-Scheduling Using Hopfield Neural Network .” IEE Proceedings-Gener. Transm. Distrib. , Vol. 143, No. 3, May 1996, pp 269-275 .  
 [17] Kwang Y. Lee , Arthit Sode-Yome , June Ho Park , 1998, “Adaptive Hopfield Network for Economic Load Dispatch ”, IEEE Transc. on Power Systems ,Vol 13, No 2 , May 1998 , pp 519-526  
 [18] T. Yalcinoz and M. J. Short , 1998, “Neural Network Approach for Solving Economic Dispatch Problem with Transmission Capacity Constrains ”, IEEE Transc. on Power Systems ,Vol 13, No 2 , May 1998 , pp 307-313.  
 [19] Insley b. Pyne 1956. “Linear Programming on na electronic analogue computer ”, Trans. AIEE. ,Part I (Comm. & Elect.) , vol 75, 1956 .pp 139-143.  
 [20] Leon O. Chua and Gui-Nian-Lin ,1984. “Nonlinear Programming without Computation ”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-31, No 2 ,February 1984 , pp 182-188.  
 [21] Leon O. Chua and Gui-Nian-Lin ,1985. Errata to “Nonlinear Programming without Computation ”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-32, No 7 ,July 1985 , pp 736.  
 [22] G Wilson. ,1986. “Quadratic Programming Analogs ”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-33, No 9 ,Sept 1986 , pp 907-911.  
 [23] A. Rodriguez-Vázquez e ..... ,1990. “Nonlinear Switched-Capacitor Neural Networks for Optimization Problems ”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-37, No 3 ,March 1990, pp384-398 .  
 [24] Leon O. Chua and D. N. Green ,1976. “A Qualitative Analysis of the Behavior of Dynamic Nonlinear : Stability of Autonomous Networks ”, IEEE Trans. on Circuitys and Systems ,Vol -cas-23, No 7 ,July 1985 , pp 355-379.