Processamento Estatístico de Sinais: Lista 1

Problema 1 Dispõe-se em um experimento de um conjunto de observações

$$r_i = a + w_i \qquad 1 \leq i \leq N \tag{1}$$

onde a é uma amostra do parâmetro aleatório desconhecido A com função densidade de probabilidade (fdp) $N(0, \sigma_a^2)$ e $\{w_i\}$, $1 \leq i \leq N$, é uma amostra da seqüência de variáveis aleatórias $\{W_i\}$, estatisticamente independentes e identicamente distribuídas com fdp $N(0,\, \sigma_n^2)$.

a) Mostre que a estimativa MMSE (mínimo erro quadrático médio) do parâmetro a dadas as observações

$$\mathbf{r} = [r_1\, r_2 \ldots r_N]^T \tag{2}$$

coincide com a estimativa MAP (máximo a posteriori) e é dada por

$$\hat{a}_{MMSE} = \hat{a}_{MAP} = \frac{\sigma_a^2}{N\,\sigma_a^2 + \sigma_n^2}\,(\sum_{i=1}^{N} r_i)\ . \tag{3}$$

Dica: Absorva todos os termos que só dependem das observações em uma constante e complete quadrados para calcular $p(a \mid \mathbf{r})$.

b) Quais são os limites da estimativa quando

1. $\sigma_a^2 >> \sigma_n^2/N$?

2. $\sigma_a^2 << \sigma_n^2/N$?

Interprete.

Problema 2 Seja $x \in \Re$ um parâmetro desconhecido amostrado da fdp $p(x)$ associada à variável aleatória X, e seja $\mathbf{y} \in \Re^N$ uma realização observada do vetor aleatório $\mathbf{Y}$ com fdp condicional $p(\mathbf{y} \mid x)$. Seja $\hat{x}(\mathbf{y})$ uma estimativa do parâmetro x dada a observação aleatória $\mathbf{y}$ e considere válidas as seguintes condições:

1. $\frac{\partial p(\mathbf{y},x)}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 p(\mathbf{y},x)}{\partial x^2}$ existem e são absolutamente integráveis em x e $\mathbf{y}$.

2. A expectativa condicional do erro dado x, ou seja,

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{x}(\mathbf{y}) - x]\, p(\mathbf{y} \mid x)\, d\mathbf{y} \tag{4}$$

é tal que

$$\lim_{x \to \infty} B(x)p(x) = \lim_{x \to -\infty} B(x)p(x) = 0 \ . \tag{5}$$

3. $p(\mathbf{y},\, x) > 0, \qquad \forall x \in \Re,\, \forall \mathbf{y} \in \Re^N.$

Prove que

$$E\left\{[\hat{x}(\mathbf{Y}) - X]^2\right\} \ \geq \ (E\left\{\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{Y},\, X)}{\partial X}\right]^2\right\})^{-1} \tag{6}$$

$$= \left\{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{Y},\, X)}{\partial X^2}\right]\right\}^{-1} \tag{7}$$

onde as expectativas são tomadas sobre todas as possíveis realizações de X e $\mathbf{Y}$. O limite (7) é conhecido como *limite de Crámer-Rao*.

Dicas para a demonstração

a) Multiplique (4) por $p(x)$, derive em relação a x em ambos os lados, integre em ambos os lados para x indo de $-\infty$ a $+\infty$, e use (5).

b) Use o fato de que

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{y},\, x)}{\partial x} = \frac{1}{p(\mathbf{y},\, x)} \frac{\partial p(\mathbf{y},\, x)}{\partial x} \tag{8}$$

e aplique a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* (CS) para provar (6). Baseado nas propriedades da desigualdade CS, você é capaz de dizer quando a igualdade é atingida em (7) ?

(c) Para demonstrar (7), lembre-se de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y},\, x)\, d\mathbf{y}\, dx = 1 \ \ . \tag{9}$$

Derive (9) duas vezes em relação a x, usando em cada passo a equação (8).

Problema 3 (Minimum Absolute Error Estimate) Seja x uma realização desconhecida da variável aleatória X com fdp $p(x)$ e seja $\mathbf{y}$ uma realização observada de dimensão p x 1 do vetor aleatório $\mathbf{Y}$ com função densidade de probabilidade condicional $p(\mathbf{y} \mid x)$. Deseja-se obter a estimativa

$$\hat{x}_{abs} = h(\mathbf{y}) \qquad\qquad h\colon \Re^p \to \Re \tag{10}$$

que minimize $E\left\{C_{abs}\left[X - h(\mathbf{Y})\right]\right\}$ onde

$$C_{abs}\left[\varepsilon\right] = \mid \varepsilon \mid \qquad\quad \varepsilon \in \Re \tag{11}$$

e a média $E\left\{C_{abs}\left[X - h(\mathbf{Y})\right]\right\}$ é feita sobre todas as possíveis realizações de X e $\mathbf{Y}$. Mostre que $\hat{x}_{abs}$ é igual à <u>mediana</u> da função densidade de probabilidade a posteriori $p(x \mid \mathbf{y})$, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{h(\mathbf{y})} p(x \mid \mathbf{y})\, dx = \int_{h(\mathbf{y})}^{\infty} p(x \mid \mathbf{y})\, dx \ . \tag{12}$$

Em (12), a densidade a posteriori é calculada por

$$p(x \mid \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} \mid x)\, p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y} \mid x)\, p(x) dx} \ . \tag{13}$$

Problema 4 O número de eventos N em um experimento obedece a uma lei de Poisson com média m, ou seja,

$$P(N = n \mid m) = \frac{m^n}{n!} \exp(-m) \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{14}$$

A média m é uma amostra desconhecida de uma variável aleatória M com função densidade de probabilidade exponencial da forma

$$p(m) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda\, m) & m > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{15}$$

Deduza a estimativa MAP do parâmetro m dado o número de eventos n observado no experimento.