ET-236: Lista de Revisão # 2

Problema 1 Seja X uma variável aleatória real definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. Obtenha uma expressão para a função distribuição de probabilidade $F_X(x)$ da variável aleatória X nos casos em que

a) $f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \qquad x \geq 0,\ \sigma > 0$ (Variável Rayleigh).

b) $f_X(x) = \frac{b}{\pi\,[(x-a)^2+b^2]} \qquad b > 0, a \in \Re, x \in \Re$ (Variável Cauchy).

Problema 2 Seja X uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função distribuição de probabilidade $F_X(x)$ contínua e diferenciável para qualquer $x \in \Re$. Seja ainda $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória X. Defina em seguida a nova variável aleatória $Y = X^2$ tal que Y é a função

$$\begin{aligned} Y\colon S &\rightarrow \Re \\ \xi &\rightarrow Y(\xi) = X^2(\xi) \end{aligned}$$

com $\{\xi \in S{:}X^2(\xi) \in B\} \in \mathcal{F}$ para qualquer evento B no campo Borel de $\Re$.

a) Escreva a função densidade de probabilidade $f_Y(y)$ da variável aleatória Y em função da densidade de probabilidade $f_X(x)$ da variável X.

Dica: Note que, para $y > 0$, $P(\{Y \leq y\}) = P(\{X^2 \leq y\}) = P(\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\})$.

b) Particularize o resultado do item (a) quando X é uma variável aleatória gaussiana $X \sim N(0, 1)$.

c) Repita os itens (a) e (b) assumindo agora que $Y = \sigma X + \mu$ com com $\sigma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$ reais arbitrários.

Problema 3 Seja X uma variável aleatória mista definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ tal que a sua função distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-0.5x) & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \exp(-x) & x \geq 1 \end{cases} .$$

a) Obtenha uma expressão para a função densidade de probabilidade generalizada de X usando a função Delta de Dirac.

b) Verifique que a integral de $-\infty$ a $+\infty$ da função $f_X(x)$ obtida no item (a) é igual a 1.

c) Calcule $P(\{0.5 < X \leq 2\})$ usando

c.1) A função distribuição de probabilidade $F_X(x)$.

c.2) A função densidade de probabilidade generalizada $f_X(x)$.

Problema 4 Seja X uma variável aleatória real definida em um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$. Para uma função mensurável $g{:}\Re \rightarrow \Re$, defina a seguir a nova variável aleatória $Y = g(X)$ tal que, para qualquer $\xi \in S$, $Y(\xi) = g(X(\xi))$ com a restrição de que, para qualquer G no corpo Borel de $\Re$, o conjunto $\{\xi \in S \mid g(X(\xi)) \in G\} \in \mathcal{F}$. Obtenha uma expressão analítica para a função densidade de probabilidade $f_Y(y)$ variável aleatória Y nos seguintes casos:

a) X é uma variável aleatória uniforme em $(-\pi/2, \pi/2)$ e $Y = tan(X)$.

b) X é uma variável aleatória exponencial com função densidade de probabilidade $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) u(x)$, onde $u(x)$ é a função degrau unitário, e $Y = \sqrt{X}$.

Problema 5 Seja X uma variável aleatória contínua definida em um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$.

a) Calcule a função geradora de momentos $\Phi_X(s)$ da variável aleatória X quando X é uma variável exponencial com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde λ é um parâmetro real positivo.

b) Assuma em seguida que X é uma variável aleatória com função geradora de momentos

$$\Phi_X(s) = \frac{a - 3s}{s^2 - 6s + 8} \qquad \mathrm{Re}(s) < 2.$$

b.1) Ache o valor de a para que $\Phi_X(s)$ seja uma função geradora de momentos válida. (Dica: Interprete o significado de $\Phi_X(0)$).

b.2) A partir da função geradora de momentos $\Phi_X(s)$ obtida em (b.1), calcule a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ da variável aleatória X. (Dica: expanda $\Phi_X(s)$ em frações parciais e anti-transforme usando o resultado do item (a).)

c) Calcule $E\{X\}$ usando (i) a função geradora de momentos $\Phi_X(s)$, e (ii) a função densidade de probabilidade $f_X(x)$.

Problema 6 Usando a função geradora de momentos, calcule a média e a variância da variável aleatória X assumindo as seguintes funções densidade de probabilidade:

a) Densidade Gama

$$f_X(x) = \gamma\, x^{b-1} \exp(-c\, x) U(x), \qquad \gamma = \frac{c^b}{\Gamma(b)}$$

onde $U(x)$ é igual a 1 para $x \geq 0$ e igual a 0 caso contrário e a função $\Gamma(\alpha)$ é dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx \ .$$

b) Densidade Exponencial

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) U(x) \ .$$

b.3) Densidade Chi-Quadrado de ordem n

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\exp(-\frac{x}{2})\,U(x)\ .$$

Problema 7 Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x) = 0$, para $x < 0$, e média $m_x = E\{X\} < \infty$. Demonstre a desigualdade de Markov

$$P(\{X \geq \alpha\}) \leq \frac{m_x}{\alpha} \qquad \forall \alpha > 0\ .$$

Problema 8 Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores inteiros $k = 0, 1, \ldots$. Defina a seguir a função

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X = k\})\, z^k \qquad z \in \mathcal{C}\ .$$

a) Verifique que

$$\frac{d}{dz}\phi(z)\,\Big|_{z=1} = E\{X\}\,, \qquad \frac{d^2}{dz^2}\phi(z)\,\Big|_{z=1} = E\left\{X^2\right\} - E\{X\}\ .$$

b) Use o resultado do item (a) para a calcular a média e a variância da variável aleatória X com função massa de probabilidade de Poisson

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Problema 9 Um professor inexperiente de uma escola desconhecida freqüentemente comete erros na disciplina que ministra. A cada aula, os alunos perguntam a esse professor uma, duas ou três questões com igual probabilidade 1/3 e o professor tem uma probabilidade igual a 1/4 de responder errado cada questão perguntada, sendo as respostas a cada pergunta estatisticamente independentes entre si.

a) Definindo as variáveis aleatórias discretas X e Y que modelam respectivamente o número de questões que são perguntadas ao professor em uma dada aula e o número de questões respondidas corretamente nessa mesma aula, escreva as suas funções massa de probabilidade, $P_X(x)$ e $P_Y(y)$, para $x = 1, 2, 3$ e $y = 0, 1, 2, 3$.

b) Usando o resultado do item (a), calcule a média e a variância das variáveis aleatórias X e Y.