# Processamento Estatístico de Sinais: Lista 2

**Problema 1** Seja $\{\mathbf{X}_k\}$, $k \geq 0$, uma seqüência de vetores aleatórios gaussianos reais $\mathbf{X}_k$ de dimensão $n \times 1$, e seja por outro lado $\{\mathbf{Y}_k\}$ uma seqüência de vetores aleatórios gaussianos $\mathbf{Y}_k$ de dimensão $l \times 1$ tal que

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \qquad k \geq 0 \tag{1}$$

onde $\{\mathbf{V}_k\}$, $k \geq 0$, é uma seqüência independente, identicamente distribuída de vetores aleatórios reais de dimensão $l \times 1$ com $p(\mathbf{v}_k) = N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, $\forall k \geq 0$ . As seqüências $\{\mathbf{X}_k\}$ e $\{\mathbf{V}_k\}$ são estatisticamente independentes e a seqüência de matrizes $l$ x $n$, $\{\,\mathbf{H}_k\,\}$, é assumida conhecida para $k \geq 0$.

Para um dada realização $\{\mathbf{y}_k\}$, $k \geq 0$, de $\{\mathbf{Y}_k\}$, introduza agora a seqüência de inovações $\{\underline{\nu}_k\}$, $k \geq 0$, tal que

$$\underline{\nu}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} \qquad k \geq 0 \tag{2}$$

onde

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = E\left[\mathbf{Y}_k \mid \mathbf{y}_0 \ldots \mathbf{y}_{k-1}\right] \qquad k \geq 1 \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{0|-1} = E\left[\mathbf{Y}_0\right] = \mathbf{H}_0\, E\left[\mathbf{X}_0\right] \tag{4}$$

Verifique que qualquer vetor observado $\mathbf{y}_{0:k} = \left[\mathbf{y}_0^T\, \mathbf{y}_1^T\, \ldots\, \mathbf{y}_k^T\right]^T$ pode ser escrito na forma $\mathbf{b} + \mathbf{A}\underline{\nu}_{0:k}$ onde $\underline{\nu}_{0:k}$ é o vetor correspondente de inovações e a matriz $\mathbf{A}$ é inversível.

**Problema 2** Sejam $\{\mathbf{X}_k\}$ e $\{\mathbf{Y}_k\}$, $\mathbf{X}_k{:}\mathcal{S} \to \Re^N$, $\mathbf{Y}_k{:}\mathcal{S} \to \Re^L$, duas seqüências de vetores aleatórios definidas em um espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ e descritas pelo modelo dinâmico

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{W}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{u}_k \qquad k \geq 0 \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \qquad k \geq 0 \tag{6}$$

onde $\mathbf{u}_k$ é um sinal determinístico conhecido, e $\{\mathbf{W}_k\}$ e $\{\mathbf{V}_k\}$, $k \geq 0$, são seqüências de vetores aleatórios de média nula tais que

$$E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_l^T & \mathbf{V}_l^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_k^T & \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \delta_{kl} \; . \tag{7}$$

Em (7), $\delta_{kl}$ é o delta de Kronecker e $\mathbf{R}_k$ e $\mathbf{Q}_k$ são matrizes positivas definidas para qualquer $k \geq 0$.

Assumindo-se que $\mathbf{X}_0$, $\{\mathbf{W}_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\mathbf{V}_k\}_{k\geq 0}$, são mutuamente gaussianos e que $\{\mathbf{W}_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\mathbf{V}_k\}_{k\geq 0}$ são independentes de $\mathbf{X}_0$, mostre que

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = E\left[\mathbf{X}_{k+1} \mid \mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k\right] = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{L}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \tag{8}$$

com o ganho de Kalman (modificado) $\mathbf{K}_k$ dado por

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{F}_k \mathbf{\Pi}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k)(\mathbf{H}_k \mathbf{\Pi}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \; . \tag{9}$$

Na expressão (9), $\mathbf{\Pi}_{k|k-1}$ é a matriz de covariância do erro do preditor, ou seja,

$$\mathbf{\Pi}_{k|k-1} = E\left[(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})^T\right] \; . \tag{10}$$

Observação: A equação do filtro de Kalman vista em aula é um caso particular da equação (8) quando $\mathbf{L}_k$ e $\mathbf{S}_k$ são iguais a zero.

**Problema 3 (Identificação de filtros FIR)** Seja W um filtro FIR de comprimento $L+1$ tal que para uma dada seqüência de entrada, $\{x_n\}$, $n \in \mathcal{Z}$, obtém-se a seqüência de saída $\{d_n\}$ com

$$d_n = \sum_{k=0}^{L} w_k x_{n-k} \; .$$

Observando-se as seqüências de entrada $\{x_n\}$ e de saída, $\{d_n\}$, deseja-se obter um algoritmo recursivo para estimar os coeficientes desconhecidos $\mathbf{w} = [w_0 \; w_1 \; \ldots \; w_L]^T$ do filtro $W$.

Para resolver o problema, introduza um vetor de pesos aleatório $\mathbf{W}_n$ que varia no tempo de acordo com a equação

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \mathbf{U}_n \qquad n \geq 0 \tag{11}$$

onde $\{\mathbf{U}_n\}$ é uma seqüência i.i.d. com fdp $N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_n)$. A seguir, para uma seqüência observada (fixa) de entradas, modele a saída do sistema $d_n$ no instante $n$ como uma amostra da variável aleatória $D_n$ tal que

$$D_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{W}_n + V_n \qquad n \geq 0 \tag{12}$$

onde $\{V_n\}$ é outra seqüência i.i.d com fdp $N(0, \sigma_v^2)$ e

$$\mathbf{x}_n = [x_n \; x_{n-1} \; \ldots \; x_{n-L}]^T \; .$$

As seqüências $\{\mathbf{U}_n\}$, $\{V_n\}$ e a condição inicial $\mathbf{W}_0$ são assumidas conjuntamente gaussianas e mutuamente não-correlacionadas.

Defina agora

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}_{n|\,n} &= E\left[\mathbf{W}_n \mid d_0 \dots d_n\right] &(13)\\
\mathbf{S}_{n|n} &= E\left[(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_{n|n})(\mathbf{W}_n - \hat{\mathbf{W}}_{n|n})^T\right] &(14)
\end{aligned}$$

e introduza em seguida a matriz

$$P_n = \frac{\lambda\,\mathbf{S}_{n+1|\,n}}{\sigma_v^2} \tag{15}$$

onde $\lambda$ é uma constante tal que $0 < \lambda < 1$. Mostre que, se no modelo (11) tomarmos

$$Q_n = (\lambda^{-1} - 1)\mathbf{S}_{n|n}\ , \tag{16}$$

então a aplicação direta das equações do filtro de Kalman para o modelo em espaço de estados dado pelas equações (11) e (12) leva ao seguinte algoritmo recursivo para o cálculo de $\hat{\mathbf{w}}_{n|n}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}_{n|n} &= \hat{\mathbf{w}}_{n-1|n-1} + \frac{\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n + \lambda}\left[d_n - \mathbf{x}_n^T\mathbf{w}_{n-1|n-1}\right] &(17)\\
\mathbf{P}_n &= \frac{1}{\lambda}\left[\mathbf{P}_{n-1} - \frac{\mathbf{P_{n-1}}\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}}{\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n + \lambda}\right]\ . &(18)
\end{aligned}$$

Compare o algoritmo acima ao algoritmo RLS ("recursive least squares") da literatura de filtragem adaptativa.

**Problema 4 (Estimação de Fase)** Seja $\left\{\mathbf{X}_k = [\,\Lambda_k\ \Theta_k]^T\right\}$, $k \geq 0$, uma seqüência de vetores aleatórios (reais) tal que

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} \\ \Theta_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}\mathbf{X}_k + \mathbf{G}W_k$$

onde $\{W_k\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias (reais) tal que $E\{W_k\} = 0$ e $E\{W_k W_l\} = q\ \delta_{kl}$. Seja agora $\{Y_k\}$, $k \geq 0$, uma seqüência de observações aleatórias tal que

$$Y_k = \sqrt{2}\sin(\omega_0 k + \Theta_k) + V_k$$

onde $E\{V_k\} = 0$ e $E\{V_k V_l\} = r\,\delta_{kl}$. Assuma ainda que $\mathbf{X}_0$, $\{W_k\}$, $k \geq 0$ e $\{V_k\}$, $k \geq 0$, são mutuamente independentes. Usando o filtro estendido de Kalman, verifique que a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E\left[\mathbf{X}_k \mid y_0 \dots y_k\right]$ pode ser aproximadamente calculada pela recursão

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \Pi_{k|k-1}\sqrt{2}\mathbf{l}(\cos\omega_0 k + \mathbf{l}^T\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\Omega_k^{-1}\left[y_k - \sqrt{2}sin(\omega_0 k + \mathbf{l}^T\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\right]\\
\Pi_{k|k} &= \Pi_{k|k-1} - 2\Pi_{k|k-1}\mathbf{l}\,\mathbf{l}^T\Pi_{k|k-1}\Omega_k^{-1}\cos^2(w_0 k + \mathbf{l}^T\mathbf{x}_{k|\hat{k}-1})
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}^T &= [0\ 1] \\
\Omega_k &= 2\mathbf{l}^T \Pi_{k|k-1} \mathbf{l} \cos^2(\omega_0 k + \mathbf{l}^T \mathbf{x}_{k|\hat{k}-1}) + r \\
\Pi_{k|k-1} &\approx E\left[(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})^T \mid \mathbf{y}_{0:k-1}\right] .
\end{aligned}$$

**Problema 5** Seja $\{X_n\}$, $n \geq 1$, uma seqüência de variáveis aleatórias não-observadas tal que

$$X_n = \frac{1}{2} X_{n-1} + 25 \frac{X_{n-1}}{1 + X_{n-1}^2} + 8\cos(1.2\, n) + U_{n-1} \qquad n \geq 1$$

onde $\{U_k\}$, $k \geq 0$, é uma seqüência de variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância $\sigma_u^2$ e $\mathbf{X}_0$ é uma variável aleatória gaussiana de média zero e variância $\sigma_0^2$. Seja por outro lado $\{Y_n\}$, $n \geq 1$, uma outra seqüência de variáveis aleatórias tal que

$$Y_n = \frac{X_n^2}{20} + V_n \qquad n \geq 1$$

onde $\{V_k\}$, $k \geq 1$, é uma seqüência de variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância $\sigma_v^2$.

a) Assumindo-se que as variáveis aleatórias $\mathbf{X}_0$, $\{V_k\}$ e $\{U_k\}$ são estatisticamente independentes e fazendo $\sigma_0^2 = \sigma_u^2 = 10$ e $\sigma_v^2 = 1$, simule uma realização $\{x_n\}$ da seqüência aleatória $\{X_n\}$ para $1 \leq n \leq 100$. Simule ainda a correspondente seqüência observada $\{y_n\}$, $1 \leq n \leq 100$, e plote as seqüências oculta e observada em função de $n$.

b) Usando um filtro de partículas baseado na técnica SIR ("sampling/importance resampling") vista em aula, obtenha a estimativa MMSE $\hat{x}_{n\ |n}$ da variável oculta $x_n$ no instante $n$ dadas as observações $y_1$, $y_2$, $\ldots, y_n$ para $1 \leq n \leq 100$. Plote $\left\{\hat{x}_{n\ |n}\right\}$ versus $n$ e $\left\{\hat{x}_{n\ |n}\right\}$ versus $\{x_n\}$ para $1 \leq n \leq 100$. Repita esse exercício usando respectivamente $N_p = 1000$ e $N_p = 3000$ partículas.

c) Repita o item (b) usando agora um filtro estendido de Kalman (EKF). Compare então o erro de estimação para o EKF e para o filtro de partículas.