ELE-33: Aula de Exercícios # 3

Problema 1 Seja X uma variável aleatória mista definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ tal que a sua função distribuição de probabilidade é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp(-0.5x) & 0 \le x < 1 \\ 1 - \exp(-x) & x \ge 1 \end{cases} .$$

a) Obtenha uma expressão para a função densidade de probabilidade generalizada de X usando o Delta de Dirac.

b) Verifique que a integral de $-\infty$ a $+\infty$ da função $f_X(x)$ obtida no item (a) é igual a 1.

c) Calcule $P(\{0.5 < X \le 2\})$ usando

c.1) A função distribuição de probabilidade.

c.2) A função densidade de probabilidade generalizada.

Problema 2 Seja X uma variável aleatória real definida no espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$ com função distribuição de probabilidade $F_X(x)$ e seja $M \in \mathcal{F}$ o evento $M = \{a < X \le b\}$, $b > a$.
a) Calcule a função distribuição de probabilidade condicional $F_x(x \mid M)$ em termos da função $F_X(x)$.

b) Assumindo que $F_X(x)$ é diferenciável em (a, b), obtenha uma expressão para a função densidade de probabilidade condicional $f_X(x \mid M)$.

c) Particularize o resultado do item (a) quando X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[a, b]$.

Problema 3 O número de tentativas entre dois sucessos consecutivos em uma seqüência de tentativas independentes de Bernoulli com $P(\{\text{sucesso}\}) = p$, $0 < p < 1$, é modelado como uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade dita geométrica dada por

$$P_X(k) = P(\{X = k\}) = p\, q^{k-1} \qquad q = 1 - p, \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

a) Calcule $P(\{X > m\})$ para $m \ge 1$.

b) Calcule $P(\{X > m + n\} \mid \{X > m\})$ para $m \ge 1$ e $n \ge 1$. Interprete o seu resultado.

Problema 4 Em um sistema de comunicação óptico, a luz emitida por um transmissor atinge um fotodetector gerando uma corrente elétrica. Assumindo-se que o transmissor use luz térmica, o número médio de elétrons condutores gerados no receptor por segundo é modelado como uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade exponencial

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0, \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Seja N o número efetivo de elétrons gerados por segundo no receptor. A probabilidade do evento $\{N = n\}$ condicionada a uma realização fixa do parâmetro aleatório X é dada por

$$P(\{N = n\} \mid \{X = x\}) = \frac{x^n}{n!} \exp(-x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

a) Calcule $P(\{N = n\})$.
<u>Dica:</u> Use o fato de que

$$\int_0^\infty x^n \exp(-a\,x) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

para $a > 0$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Calcule a estimativa dita de máximo a posteriori do parâmetro aleatório X dado o evento $\{N = n\}$ definida como

$$\widehat{x}_{MAP} = \arg\max_x f_X(x \mid \{N = n\}) .$$

<u>Observação:</u> Note que, para efetuar a maximização acima, <u>não</u> é preciso calcular $P(\{N = n\})$.