ELE-33: Lista de Exercícios #4

Problema 1 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas e independentes com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\,\sigma^2}(x^2+y^2)\right\}$$

com $\sigma > 0$. Defina em seguida as novas variáveis aleatórias V e W tais que

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{X^2+Y^2} \qquad V \geq 0 \\ W &= \begin{cases} \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) & X > 0 \\ \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) + \pi & X < 0 \end{cases} \qquad 0 \leq W \leq 2\pi \end{aligned}$$

a) Calcule $f_{VW}(v,w)$, $f_W(w)$ e $f_V(v)$. O que se pode concluir a respeito das variáveis aleatórias V e W?

b) Repita o item (a) com as variáveis V e W definidas agora como

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{X^2+Y^2} \qquad V \geq 0 \\ W &= \frac{Y}{X}\,. \end{aligned}$$

Problema 2 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas e independentes definidas no espaço de probabilidade $(S,\mathcal{F},P)$ e defina as variáveis aleatórias Z e T tal que

$$\begin{aligned} Z &= g(X) \\ T &= h(Y) \end{aligned}$$

onde $g{:}\Re \to \Re$ e $h{:}\Re \to \Re$ são duas funções inversíveis com $g'(x) \neq 0$ e $h'(y) \neq 0$ para quaisquer $x \in \Re$ e $y \in \Re$. Mostre que as variáveis aleatórias Z e T também são independentes.

Sugestão: Calcule $f_{ZT}(z,t)$, $f_Z(z)$ e $f_T(t)$ pelo método direto e verifique que $f_{ZT}(z,t) = f_Z(z)\,f_T(t)$.

Problema 3 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas independentes com funções massa de probabilidade marginais

$$\begin{aligned} P_X(k) &= \frac{a^k}{k!}\exp(-a) \qquad k = 0,1,\ldots \\ P_Y(i) &= \frac{b^i}{i!}\exp(-b) \qquad i = 0,1,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Mostre que a variável aleatória discreta $Z = X + Y$ tem função massa de probabilidade

$$P_Z(n) = \frac{(a+b)^n}{n!}\exp\{-(a+b)\} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Observação: Esse exercício demonstra a importante propriedade de que a soma de duas variáveis independentes de Poisson também é uma variável de Poisson.

Problema 4 Seja X uma variável aleatória contínua definida em um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$.

a) Calcule a função geradora de momentos $\Phi_X(s)$ da variável aleatória X quando X é uma variável exponencial com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde λ é um parâmetro real positivo.

b) Assuma em seguida que X é uma variável aleatória com função geradora de momentos

$$\Phi_X(s) = \frac{a - 3s}{s^2 - 6s + 8} \qquad \mathrm{Re}(s) < 2.$$

b.1) Ache o valor de a para que $\Phi_X(s)$ seja uma função geradora de momentos válida. (Dica: Interprete o significado de $\Phi_X(0)$).

b.2) A partir da função geradora de momentos $\Phi_X(s)$ obtida em (b.1), calcule a função densidade de probabilidade $f_X(x)$ da variável aleatória X. (Dica: expanda $\Phi_X(s)$ em frações parciais e anti-transforme usando o resultado do item (a).)

c) Calcule $E\{X\}$ usando (i) a função geradora de momentos $\Phi_X(s)$, e (ii) a função densidade de probabilidade $f_X(x)$.

Problema 5 Usando a função geradora de momentos, calcule a média e a variância da variável aleatória X assumindo as seguintes funções densidade de probabilidade:

a) Densidade Gama

$$f_X(x) = \gamma\, x^{b-1} \exp(-c\, x) U(x), \qquad \gamma = \frac{c^b}{\Gamma(b)}$$

onde $U(x)$ é igual a 1 para $x \geq 0$ e igual a 0 caso contrário e a função $\Gamma(\alpha)$ é dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx \ .$$

b) Densidade Exponencial

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) U(x) \ .$$

b.3) Densidade Chi-Quadrado de ordem n

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \exp(-\frac{x}{2})\, U(x) \ .$$

Problema 6 Seja X uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade binomial

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

a) Mostre que a função geradora de momentos da variável binomial X definida como

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{n} \exp(t\,k)\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$$

é dada por

$$\phi(t) = (p\,e^t + q) \qquad q = 1 - p\ .$$

b) Usando o resultado do item (a), verifique que, para uma variável aleatória binomial X com parâmetros n e p, tem-se

$$\begin{aligned} m_x = E\{X\} &= n\,p \\ \sigma_x^2 = E\left\{(X - m_x)^2\right\} &= n\,p\,(1-p)\ . \end{aligned}$$

c) Sugira uma interpretação intuitiva para o resultado acima.