ET-236: Lista 4

Problema 1 Seja X uma variável aleatória real e $\mathbf{Y}$ um vetor aleatório real de dimensão $M \times 1$. Dada uma realização observada $\mathbf{y}$ do vetor aleatório $\mathbf{Y}$, deseja-se obter a melhor estimativa linear

$$\widehat{x}(\mathbf{y}) = a_0 + a_1\, y_1 + \ldots + a_M\, y_M \tag{1}$$

da realização desconhecida x da variável X de modo que o erro quadrático médio de estimação

$$\varepsilon^2 = E\left\{[X - (a_0 + a_1 Y_1 + \ldots + a_M Y_M)]^2\right\} \tag{2}$$

seja mínimo.

a) Mostre que os coeficientes $\{a_0, a_1, \ldots, a_M\}$ que minimizam (2) satisfazem o sistema de equações

$$a_0 + \underline{\mu}_y^T \mathbf{a} \;=\; \mu_x \tag{3}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}}\, \mathbf{a} \;=\; \mathbf{R}_{x\,\mathbf{y}}^T - a_0\, \underline{\mu}_{\mathbf{y}} \tag{4}$$

onde $\underline{\mu}_{\mathbf{y}} = E\{\mathbf{Y}\}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = E\left\{\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^T\right\}$, $\mathbf{R}_{x\,\mathbf{y}} = E\left\{X\,\mathbf{Y}^T\right\}$ e $\mathbf{a} = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_M]^T$.

b) Resolva o sistema dado pelas equações (3) e (4) e, usando as propriedades vistas em aula, mostre que a estimativa de mínimo erro quadrático médio com estrutura como em (1) é dada por

$$\widehat{x}(\mathbf{y}) = \mu_x + \mathbf{C}_{x\,\mathbf{y}}\, \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y} - \underline{\mu}_{\mathbf{y}}) \tag{5}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{x\,\mathbf{y}} &= E\left\{(X - \mu_x)\,(\mathbf{Y} - \underline{\mu}_{\mathbf{y}})^T\right\} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{y}} &= E\left\{(\mathbf{Y} - \underline{\mu}_{\mathbf{y}})\,(\mathbf{Y} - \underline{\mu}_{\mathbf{y}})^T\right\} \ . \end{aligned}$$

Verifique que a estimativa (5) tem viés nulo, ou seja, $E\left\{\widehat{X}(\mathbf{Y})\right\} = \mu_x$.

c) Mostre que o erro quadrático médio ε^2 associado à estimativa ótima em (5) é dado por

$$\varepsilon^2_{\text{min}} = \sigma_x^2 - \mathbf{C}_{x\,\mathbf{y}}\, \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{C}_{x\mathbf{y}}^T \ .$$

Problema 2 Em um sistema simplificado de radar digital, denote por H_1 a hipótese "alvo presente" e por H_0 a hipótese "alvo ausente". Apó um pré-processamento apropriado e amostragem no tempo do eco do radar, obtém-se no receptor um vetor de observações $\mathbf{x}$ modelado como

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \qquad \text{sob a hipótese } H_1 \tag{6}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{n} \qquad \text{sob a hipótese } H_0 \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

onde $\mathbf{s}$ é um vetor determinístico $N \times 1$ que representa o eco sem ruído do alvo e $\mathbf{n}$ é uma realização (amostra) de um vetor aleatório $\mathbf{N}$ de dimensão $N \times 1$ com média $\underline{\mu}_{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ e matriz de correlação $\mathbf{R_n} = \mathbf{R}$.

O detector chamado de *Neyman-Pearson* decide pela hipótese H_1 dadas as observações $\mathbf{x}$ se

$$\frac{f_{\mathbf{x}|H_1}(\mathbf{x} \mid H_1)}{f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{x} \mid H_0)} > \gamma \ . \tag{9}$$

onde γ é um limiar fixado de acordo com a probabilidade desejada de falso alarme do sistema. Caso contrário, se a razão à esquerda em (9) for menor ou igual ao limiar, decide-se pela hipótese H_0. Em (9), $f_{\mathbf{x}|H_i}(\mathbf{x} \mid H_i)$ denota a função densidade de probabilidade condicional do vetor $\mathbf{X}$ dada a hipótese H_i, $i = 1, 2$.

a) Mostre que se $\mathbf{N}$ for modelado como um vetor gaussiano, então o teste de hipóteses (9) é equivalente ao teste

$$\mathbf{s}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \gamma + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s} \ . \tag{10}$$

b) Verifique que, no caso particular, em que $\mathbf{N}$ é um ruído dito "branco", i.e., $\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{I}$ onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, então o teste (10) é equivalente ao teste

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \, x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \widehat{\gamma} \ . \tag{11}$$

onde

$$\widehat{\gamma} = \sigma^2 \ln \gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \ .$$

O detector (11) é conhecido na literatura como detector de correlação ou filtro casado ("matched filter").

c) Usando as propriedades vistas em aula sobre transformações lineares de vetores aleatórios, calcule a média e a variância da variável de decisão

$$l = \mathbf{s}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}$$

condicionadas respectivamente às hipóteses H_1 e H_0. Como você poderia usar esses resultados para calcular as probabilidades de detecção e falso alarme do detector (10)?

Problema 3 Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias com médias μ_{x_1} e μ_{x_2} e variâncias respectivamente $\sigma^2_{x_1}$ e $\sigma^2_{x_2}$. Denote ainda por $\sigma_{x_1\,x_2}$ a covariância entre X_1 e X_2. Defina a seguir a variável aleatória

$$Z = \omega_1\, X_1 + \omega_2 X_2 \tag{12}$$

onde ω_1 e ω_2 são coeficientes reais arbitrários.

a) Calcule a média μ_z e a variância σ^2_z da variável aleatória Z em função de μ_{x_1}, μ_{x_2}, $\sigma^2_{x_1}$, $\sigma^2_{x_2}$ e $\sigma_{x_1\,x_2}$.

b) Defina sem seguida a função característica conjunta $\Phi(w_1,\, w_2)$ das variáveis aleatórias X_1 e X_2 como sendo a função complexa

$$\Phi_{x_1\,x_2}(\omega_1, \omega_2) = E\left\{\exp\left[j\,(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[j\,(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)\right] f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \ .$$

Usando o resultado do item (a), calcule $\Phi_{x_1\,x_2}(\omega_1, \omega_2)$ no caso em que X_1 e X_2 são duas variáveis conjuntamente gaussianas.

c) Generalizando os resultados anteriores, obtenha uma expressão analítica para a função característica conjunta

$$\Phi_{\mathrm{X}}(\underline{\omega}) = E\left\{\exp\left[j\,\underline{\omega}^T \mathbf{X}\right]\right\}, \qquad \underline{\omega} \in \Re^N$$

onde $\mathbf{X} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_N]^T$, $N \geq 2$, é um vetor aleatório gaussiano com média $\underline{\mu}_x$ e matriz de covariância $\mathbf{C_{xx}}$.

Problema 4 Seja $\{\mathbf{X}_n\}$, $n \geq 0$, uma seqüência de vetores aleatórios reais de dimensão $N \times 1$ tal que

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}\ \mathbf{X}_n + \mathbf{G}\ \mathbf{U}_n \qquad n \geq 0$$

onde $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são matrizes reais de dimensão respectivamente $N \times N$ e $N \times M$ e, $\{\mathbf{U}_n\}$, $n \geq 0$, é uma seqüência de vetores aleatórios reais de dimensão $M \times 1$ tais que

$$\begin{aligned} E\left\{\mathbf{U}_n\right\} &= \mathbf{0} \qquad \forall n \geq 0 \\ E\left\{\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T\right\} &= \mathbf{Q} \qquad \forall n \geq 0\ . \end{aligned}$$

Os vetores aleatórios $\mathbf{X}_0$ e $\{\mathbf{U}_n\}$, $n \geq 0$, são assumidos mutuamente independentes entre si. A matriz de covariância $\mathbf{Q}$ é assumida positiva definida.

a) Verifique que o vetor aleatório $\mathbf{X}_n$ pode ser escrito como

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{F}^n \mathbf{X}_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathbf{F}^{n-1-l} \mathbf{G} \mathbf{U}_l \qquad n \geq 1$$

com $\mathbf{F}^0 = \mathbf{I}$ (matriz identidade). Conclua então que, pelas hipóteses de independência estatística entre $\mathbf{U}_n$ e $\mathbf{X}_0$ e, entre $\mathbf{U}_n$ e $\{\mathbf{U}_k\}$, $0 \leq k \leq n-1$, os vetores aleatórios $\mathbf{X}_n$ e $\mathbf{U}_n$ são estatisticamente independentes.

b) Defina agora

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n &= E\{\mathbf{X}_n\} \\ \mathbf{C}_n &= E\left\{(\mathbf{X}_n - \mathbf{m}_n)(\mathbf{X}_n - \mathbf{m}_n)^T\right\} \ . \end{aligned}$$

Mostre que $\mathbf{m}_n$ e $\mathbf{C}_n$ podem ser calculados para pelas recursões

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{F}\ \mathbf{m}_n \qquad n \geq 0 \tag{13}$$

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{C}_n\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \qquad n \geq 0 \tag{14}$$

com condições iniciais $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_{\mathbf{X}_0}$ e $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_{\mathbf{X}_0}$.

c) Mostre que, se existir a matriz

$$\mathbf{C}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{F}^n \mathbf{G}) \mathbf{Q} (\mathbf{F}^n \mathbf{G})^T$$

então

$$\mathbf{C}_\infty = \mathbf{F}\mathbf{C}_\infty\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T$$

ou seja, $\mathbf{C}_\infty$ é um ponto fixo da recursão (14).

Problema 5 Seja $\{\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_q\}$ uma coleção de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[\,0, 2\pi)$. Defina o processo estocástico complexo de tempo discreto

$$X\,[n] = \sum_{i=1}^{p} A_i \exp\left[j(w_i n T + \phi_i)\right] \qquad n \geq 0 \tag{15}$$

onde $\{A_i\}$ e $\{w_i\}$ são parâmetros <u>reais</u> e <u>determinísticos</u>.

a) Verifique que a equação (15) pode ser reescrita na forma

$$X\,[n] = \sum_{i=1}^{p} B_i\, z_i^n \qquad n \geq 0 \tag{16}$$

onde $B_i = A_i \exp(j\phi_i)$ e $z_i = \exp(j\, w_i\, T)$.

b) Escrevendo-se em seguida a equação (16) para $n = 0,\ 1,\ \ldots, N-1$ e introduzindo-se o vetor

$$\mathbf{X} = [X_0\ X_1\ \ldots\ X_{N-1}]^T$$

verifique que $\mathbf{X} = \mathbf{VB}$ onde $\mathbf{B}$ é um vetor coluna (complexo) que coleciona os modos B_1, B_2, $\ldots$, B_p e $\mathbf{V}$ é uma matriz (complexa) de Vandermonde. Explicite a estrutura da matriz $\mathbf{V}$ em função de z_1, z_2, $\ldots$, z_p.

c) Assuma agora que se observa o vetor aleatório complexo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$$

onde $\mathbf{N}$ é um ruído aleatório estatisticamente independente das variáveis aleatórias $\{\phi_i\}$, e com média $E\{\mathbf{N}\} = \mathbf{0}$ e matriz de correlação $E\left\{\mathbf{N}\mathbf{N}^H\right\} = \sigma^2\mathbf{I}$, onde o símbolo "H" denota conjugado transposto.

c.1) Mostre que $E\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{0}$ e que a matriz de correlação das observações, $\mathbf{R} = E\left\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\right\}$, tem a estrutura

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^H + \sigma^2\mathbf{I}$$

onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal de dimensão $p \times p$.

c.2) Assumindo-se que $N >> p$ e que as freqüências $\{w_i\}$ são tais que a matriz $\mathbf{V}$ tem posto p, mostre que os autovalores de $\mathbf{R}$ são dados por

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu_i + \sigma^2 & 1 \leq i \leq p \\ \sigma^2 & p+1 \leq i \leq N \end{cases} \tag{17}$$

onde $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ são os autovalores não-nulos de $\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^H$.