ELE-33: Aula de Exercícios # 5

Problema 1 Seja $X : \mathcal{S} \rightarrow \Re$ uma variável aleatória contínua definida no espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ com função densidade de probabilidade $f_X(x) = 0, \forall x < 0$. Seja a seguir α um número real positivo arbitrário. Mostre que

$$P(\{X \geq \alpha\}) \leq \frac{E\{X\}}{\alpha} \qquad \text{(Desigualdade de Markov).}$$

Problema 2 Seja $X : \mathcal{S} \rightarrow \Re$ uma variável aleatória *discreta* definida no espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ e assumindo valores no conjunto enumerável $\mathcal{A} = \{x_i\}_{i \geq 1}$ com $P(\{X = x_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Seja a seguir $f : \Re \rightarrow \Re$ uma função *convexa* sobre toda a reta real. Mostre que

$$f(E\{X\}) \leq E\{f(X)\} \qquad \text{(Desigualdade de Jensen).}$$

Observação: Uma função $f(x)$ é dita convexa sobre um intervalo I se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ e qualquer λ, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Problema 3 Seja $X : \mathcal{S} \rightarrow \Re$ uma variável aleatória definida em um espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ com $E\left\{\mid X \mid^k\right\} < \infty$, $\forall k \geq 1$. Mostre que

$$E^{1/\alpha}\{\mid X \mid^{\alpha}\} \leq E^{1/\beta}\left\{\mid X \mid^{\beta}\right\}, \; 1 \leq \alpha < \beta \qquad \text{(Desigualdade de Lyapunov).}$$

Sugestão: Mostre que $E^{1/(k-1)}\left\{\mid X \mid^{k-1}\right\} \leq E^{1/k}\left\{\mid X \mid^{k}\right\}$, $\forall k > 1$.

Problema 4 Seja $X{:}\mathcal{S} \rightarrow \Re$ uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. Defina a seguir, quando existir, a *função característica* de X, dada pela função *complexa* de variável real

$$\Psi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \exp(j\,\omega\,x)\,d\,x \qquad j^2 = -1, \quad \omega \in \Re.$$

Mostre que, se $X \sim N(m, \sigma^2)$, então,

$$\Psi_X(\omega) = \exp(j\,m\,\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2}).$$

Problema 5 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais de médias finitas respectivamente μ_x e μ_y, variâncias finitas respectivamente σ_x^2 e σ_y^2, e covariância finita σ_{xy}. Dada uma realização observada y da variável aleatória Y, deseja-se estimar o valor assumido pela variável aleatória X usando-se o estimador

$$\widehat{x}(y) = a\, y + b\ . \tag{1}$$

Calcule os valores das constantes a e b em (1)de forma a minimizar o erro quadrático médio

$$\varepsilon = E\left\{[X - (a\,Y + b)]^2\right\}\ . \tag{2}$$

Expresse o seu resultado em função dos momentos μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 e σ_{xy}.

Nota: Esse problema responde à pergunta feita em aula sobre como obter o melhor estimador (no sentido de mínimos quadrados) de x dado y, restrito à classe de estimadores da forma $\hat{x} = a\,y + b$, sem conhecer a distribuição conjunta de X e Y. Notem que, em particular, se X e Y forem conjuntamente gaussianas, o estimador obtido será também o estimador de mínimo erro quadrático médio *global* (como mostrado em aula).

Problema 6 Um astrônomo deseja medir o brilho de uma estrela distante usando um equipamento de medidas com ruído. São efetuadas N medidas $\{x_k, k = 1, \ldots, N\}$ onde cada medida x_k é modelada como uma realização da variável aleatória

$$X_k = b + N_k$$

onde $\{N_k, k = 1, \ldots, N\}$ é uma seqüência de N variáveis gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância $\sigma^2 < \infty$, e b é o brilho real (determinístico) da estrela. Para reduzir o erro de estimação, o astrônomo calcula a média amostral

$$m_N = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_N}{N}$$

das N medidas e usa essa média como estimativa do brilho b.

a) Mostre que a estimativa calculada pelo astrônomo é não-enviesada e consistente, ou seja, definindo-se a variável aleatória

$$M_N = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_N}{N},$$

mostre que $E\{M_N\} = b$ e $\lim_{n\to\infty} \sigma_{M_N}^2 = 0$.

b) Assumindo que $\sigma^2 = 4$, use a desigualdade de Chebyshev para obter um limite inferior para o número de medidas N de modo que a probabilidade de o erro absoluto de estimação ser menor do que 0.1 seja maior ou igual a 95%.

Curiosidades Históricas: Markov e Lyapunov viveram na mesma época (entre meados do século XIX e o início do século XX). Curiosamente, eles foram colegas de ginásio em Gorky e, posteriormente, foram colegas de faculdade na Universidade de São Petersburgo, onde foram ambos alunos de Chebyshev. Os três (Markov, Lyapunov e Chebyshev) são lembrados hoje como alguns dos mais famosos matemáticos russos, juntamente com outros nomes ilustres como Lobachevsky, Kolmogorov e Sobolev.

Já Johan Jensen, também mencionado nessa lista, era um engenheiro de telecomunicações dinamarquês que trabalhava, nas horas vagas, como um matemático amador. Ele era um "self-taught mathematician" e nunca obteve um doutorado ou uma posição de professor universitário. Apesar de ser lembrado provavelmente como um matemático "menor", Jensen teve algumas contribuições importantes, a mais conhecida das quais é uma versão mais geral da desigualdade do Problema 2 que tem grande aplicação em engenharia de telecomunicações, especialmente Teoria da Informação (perguntem detalhes ao Professor Pinho).