ET-236: Lista 5

Problema 1 Seja $\{U_n\}$, $n \geq 0$, uma seqüência de variáveis aleatórias reais tais que $E\{U_n\} = 0$, $\forall n \in Z$ e $E\{U_n U_m\} = \sigma^2 \delta[n-m]$. Defina agora o processo estocástico de tempo discreto $Y[n]$ como a coleção de variáveis aleatórias indexadas $\{Y_n,\ n \geq -1\}$, tal que

$$Y_n = a\,Y_{n-1} + U_n \qquad n \geq 0 \tag{1}$$

$$Y_{-1} = 0 \qquad \text{com probabilidade 1} \tag{2}$$

onde a é um constante real tal que $| a |< 1$. y a) Mostre que

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\, U_k \qquad k \geq 0\ .$$

b) Mostre que, para $n > 0$ e $m > 0$, a função de correlação cruzada

$$R_{yu}[n,\, m] = E\{Y_n U_m\} = \begin{cases} \sigma^2 a^{n-m} & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases}\ .$$

c) Mostre que, para $n > 0$ e $m > 0$, a função de autocorrelação

$$R_{yy}[n,\, m] = E[Y_n Y_m] = \begin{cases} \sigma^2 a^{n-m}\left[\frac{1-a^{2(m+1)}}{1-a^2}\right] & n > m \\ \sigma^2 a^{m-n}\left[\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}\right] & n < m \end{cases}\ .$$

d) Conclua que, se $n \to \infty$ e $m \to \infty$, mas $(m-n) \to l < \infty$, então

$$R_{yy}[n, m] \to R_{yy}[m+l, m] = R_{yy}[l] = \sigma^2 \frac{a^{|l|}}{1-a^2} \tag{3}$$

ou seja, o processo $Y[n]$ é *assintoticamente estacionário* em sentido amplo.

Problema 2 Mostre que

a) Se $X(t)$ e $Y(t)$ são dois processos estocásticos reais de tempo contínuo conjuntamente estacionários em sentido amplo com $E\left\{[X_0 - Y_0]^2\right\} = 0$, então $R_{xx}(\tau) = R_{xy}(\tau)$.

b) Se $f\colon \Re \to \Re$ e $g\colon \Re \to \Re$ são duas funções conhecidas e $X(t)$ é um processo estocástico real de tempo contínuo não-estacionário com média zero e função de autocorrelação

$$R_{xx}(t_1,\, t_2) = f(t_1)\, f(t_2) g(t_1 - t_2),$$

então o processo estocástico $Y(t) = X(t)/f(t)$ é estacionário em sentido amplo com função de autocorrelação $R_{yy}(\tau) = g(\tau)$.

Problema 3 Seja $\{T_i\}$, $i \in \mathcal{Z}$, um conjunto de pontos de Poisson e seja $t_0 \in \Re$ um ponto fixo na reta real. Defina T_n, $n \geq 1$ como o n-ésimo ponto de Poisson <u>à direita</u> de t_0. Defina a seguir a variável aleatória $Z_n = T_n - t_0$.

a) Mostre que Z_1 é uma variável exponencial de parâmetro λ com função densidade de probabilidade

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda z) & z \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b) Mostre que Z_n, $n > 1$, é uma variável Gamma de parâmetro λ com função densidade de probabilidade

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda z) & z \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problema 4 Seja $\{U_n\}$, $n \in \mathcal{Z}$, uma seqüência de variáveis aleatórias discretas de Bernoulli tal que $P(\{U_n = +1\}) = p$, $P(\{U_n = -1\}) = 1 - p$, e U_i é independente de U_j para $i \neq j$. O processo estocástico chamado "random walk" de tempo discreto é definido então como a coleção indexada de variáveis aleatórias $\{X_n, n \geq n_0\}$ onde

$$X_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} U_k \qquad n > n_0 \tag{4}$$

$$X_{n_0} = 0 \qquad \text{com probabilidade 1.} \tag{5}$$

a) Seja $l = n - n_0$ e denota por q o número de vezes em que as variáveis de Bernoulli em uma realização da seqüência $\{U_k, k = n_0 + 1, \ldots, n\}$ assumem o valor $+1$. Escreva uma expressão para a função massa de probabilidade, $P_{X_n}(x_n)$ da variável aleatória X_n como função dos parâmetros l, q e p.

b) Mostre que a função média do processo estocástico $X[n]$ é dada por

$$m_x[n] = E\{X_n\} = (2p - 1)(n - n_0)\ . \tag{6}$$

c) Mostre que a função de autocovariância $C_{xx}[n_1, n_2] = E\{(X_{n_1} - m_x[n_1])(X_{n_2} - m_x[n_2])\}$ é dada por

$$C_{xx}\left[n_1,\, n_2\right] = 4p\left(1-p\right)\left[\min(n_1, n_2) - n_0\right] \quad . \tag{7}$$

Particularize o resultado acima para o caso em que $n_0 = 0$ e $p = 0.5$.

Problema 5 Seja $\{U_n\}$, $n \in \mathcal{Z}$, uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que, para qualquer $k \in \mathcal{Z}$, U_k é uma variável aleatória gaussiana de média zero e variância σ^2. Defina agora o processo estocástico de tempo discreto $X\left[n\right]$ como a coleção indexada de variáveis aleatórias $\{X_n, n \geq 0\}$ tal que

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1}^{n} U_k \qquad n > 1 && (8) \\ X_0 &= 0 \qquad\quad \text{com probabilidade 1.} && (9) \end{aligned}$$

a) Calcule a função média $m_x\left[n\right]$ e a função de autocovariância $C_{xx}\left[n_1, n_2\right]$ do processo $X\left[n\right]$ e verifique se o processo $X\left[n\right]$ é estacionário em sentido amplo.

b) Construa em seguida o vetor de observações

$$\mathbf{x}_{3:1} = \left[x_3 \ x_2 \ x_1\right]^T$$

onde x_n denota uma amostra (realização) da variável aleatória X_n definida em (8) para $n > 1$. Usando o fato de que as variáveis aleatórias $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$ e $\mathbf{X}_4$ são conjuntamente gaussianas, calcule o preditor de mínimo erro quadrático médio

$$\widehat{x_4} = E\left[X_4 \mid \mathbf{x}_{3:1}\right] = E\left[X_4 \mid x_3,\, x_2,\, x_1\right] \ .$$

c) Calcule $E\left[(X_4 - \widehat{X}_4)X_i\right]$ para $i = 1, 2, 3$ e verifique se a estimativa $\widehat{X}_4$ satisfaz o princípio da ortogonalidade.

Problema 6 Seja $\{Z_t, t \in \Re\}$ um processo estocástico complexo tal que

$$Z_t = \sum_{n=1}^{N} A_n \exp(j\left[\omega_0 t + \Theta_n\right])$$

onde ω_0 é uma constante real, A_n é uma variável aleatória de média nula e variância $E\left\{A_n^2\right\} = \sigma^2$, $\forall n$, e Θ_n é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$ com Θ_n independente de Θ_m para $m \neq n$ e Θ_n independente de A_m para qualquer para qualquer par (n, m) incluindo $n = m$.

Cacule a média e a função de autocorrelação do processo $Z(t)$ e verifique se $Z(t)$ é estacionário em sentido amplo.

Problema 7 Sejam $X(t) \sim P(\lambda t)$ e $Y(t) \sim P(\mu t)$, $t \geq 0$, dois processos de Poisson *independentes* associados respectivamente aos conjuntos de pontos de Poisson $\{T_i^x\}$ e $\{T_l^y\}$. A seguir, denote por N o número de pontos $\{T_i^x\}$ entre dois pontos consecutivos T_{l-1}^y e T_l^y. Mostre que a variável aleatória discreta N tem função massa de probabilidade geométrica

$$P(\{N = k\}) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sugestão: Use o teorema da probabilidade total, lembrando que

$$\int_0^\infty x^n \exp(-a\, x) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad a > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$$