Processamento Estatístico de Sinais: Lista 5

Problema 1 Seja $\underline{\theta} \in \Re^p$ um vetor de parâmetros determinísticos e desconhecidos e seja $\mathbf{X} : \mathcal{S} \to \Re^N$ um vetor aleatório <u>discreto</u> definido no espaço de probabilidade $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ com função massa de probabilidade

$$P_{\underline{\theta}}(\mathbf{x}) = P(\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} \mid \underline{\theta}),$$

parametrizada pelo vetor desconhecido $\underline{\theta}$. Seja em seguida $\mathbf{T} : \Re^N \to \Re^M$ uma função mensurável e defina o novo vetor aleatório $\mathbf{T}(\mathbf{X}) : \mathcal{S} \to \Re^M$. Mostre que $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ é uma estatística suficiente para inferência do vetor de parâmetros $\underline{\theta}$ se a função massa de probabilidade de $\mathbf{X}$ puder ser fatorada como o produto

$$P_{\underline{\theta}}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) b_{\underline{\theta}}(\mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \ .$$

Problema 2 Considere um teste de hipóteses binárias simples da forma

$$l(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \mid H_1)}{p(\mathbf{x} \mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} k \tag{1}$$

onde $k > 0$. Seja $\beta = g(\alpha)$ a curva ROC do teste (1) onde β e α denotam respectivamente a potência e o tamanho do teste que variam com a escolha do limiar k. Mostre que a curva ROC é côncava no intervalo $(0, 1)$, ou seja,

$$qg(\alpha_1) + (1 - q)g(\alpha_2) \leq g(q\,\alpha_1 + (1 - q)\alpha_2)$$

para qualquer q, $0 \leq q \leq 1$ e quaisquer α_1 e α_2 em $(0, 1)$.

<u>Sugestão:</u> Ver Problema 3.13, página 87, Kay, Volume II.

Problema 3 Considere o seguinte teste de hipóteses binário:

$$\begin{aligned} H_1 : \ R &= S + N \\ H_0 : \ R &= N \end{aligned} \tag{2}$$

onde S e N são variáveis aletórias independentes, com funções densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} p(s) &= a \exp(-a\,s) \qquad & s \geq 0 \\ &= 0 & s < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} p(n) &= b \exp(-b\,n) \qquad & n \geq 0 \\ &= 0 & n < 0 \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Nas equações acima, a e b são números reais tais que $b > a > 0$.

a) Verifique que

$$p(r \mid H_1) = \begin{cases} \frac{a\,b}{b-a}\ [\exp(-a\,r) - \exp(-b\,r)] & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Dica: Lembre-se de que, se S e N são variáveis aleatórias independentes, então, $p_R(r) = p_S(r) * p_N(r)$, onde $*$ denota a operação de convolução.

b) Mostre que o teste LRT (likelihood ratio test) se reduz a

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma\ . \tag{6}$$

c) Derive uma expressão para o limiar γ como função da probabilidade de alarme falso, P_f, onde

$$P_f = \text{Prob}(\text{decidir } H_1 \mid H_0 \text{ verdadeira}). \tag{7}$$

Problema 4 Em um sistema de comunicações binário, dada a seqüência de observações $x\,[n]$, $n = 0, \ldots, N-1$, deseja-se decidir entre as hipóteses

$$\begin{aligned} H_1 : x\,[n] &= s_1\,[n] + w\,[n] && (8) \\ H_0 : x\,[n] &= s_0\,[n] + w\,[n] && (9) \\ & && (10) \end{aligned}$$

onde $s_0\,[n]$ e $s_1\,[n]$ são seqüências determinísticas conhecidas e o vetor $\mathbf{w} = [w\,[0] \ldots w\,[N-1]]$ é uma amostra do vetor aleatório gaussiano $\mathbf{W}$ com média zero e matriz de covariância $\sigma^2\mathbf{I}$).

a) Assumindo-se que $P(H_0) = P(H_1)$, derive o teste de mínima probabilidade de erro para decidir entre H_0 e H_1.

b) Calcule a probabilidade total de erro de decisão do teste derivado em (a) em função da razão

$$\eta = \frac{||\ \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0\ ||}{\sigma}\ .$$

onde $\mathbf{s}_i = [s\,[0] \ldots s\,[N-1]]$.

c) Defina a seguir

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i \qquad i = 0, 1 && (11) \\ \overline{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} && (12) \\ \rho_s &= \frac{\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_0}{\overline{\varepsilon}}\ . && (13) \end{aligned}$$

c.1) Mostre que $|\rho_s| \leq 1$.

c.2) Reescreva a expressão da probabilidade de erro de decisão em função de $\overline{\varepsilon}$, ρ_s e σ.

c.3) Particularize o resultado do item (c.2) nos casos em que $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ e ρ_s é igual respectivamente a -1 e a zero.

Problema 5 Considere um teste M-ário de hipóteses onde a observação r é um escalar real amostrado da função densidade de probabilidade

$$p(r \mid H_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(r-m_k)^2}{2\,\sigma^2}\right] \qquad k = 1, \ldots, M \tag{14}$$

onde $M = 2\,L + 1$ e

$$m_k = -L + (k-1) \qquad 1 \leq k \leq M\ . \tag{15}$$

a) Assumindo-se que as hipóteses H_k, $1 \leq k \leq M$, são equiprováveis, determine as regiões de decisão para o teste de hipóteses de mínima probabilidade de erro.

Sugestão: Verifique que

$$\begin{aligned} (r-m_i)^2 < (r-m_{i-1})^2 \quad &\Rightarrow \quad (r-m_i)^2 < (r-m_j)^2 \qquad \forall j < i-1 \\ (r-m_i)^2 < (r-m_{i+1})^2 \quad &\Rightarrow \quad (r-m_i)^2 < (r-m_j)^2 \qquad \forall j > i+1\ . \end{aligned}$$

b) Deduza uma expressão aproximada para a probabilidade de erro de símbolo do teste proposto no item (a).

Problema 6 Seja $\{x\,[n]\}$, $n = 0, \ldots, N-1$ um conjunto de observações tal que, sob a hipótese H_j, $j = 0, \ldots, M-1$,

$$x\,[n] = s_j\,[n] + w\,[n]$$

onde as seqüências $s_j\,[n]$, $j = 0, \ldots, M-1$ são determinísticas e conhecidas e $w\,[n]$ para n fixo é uma amostra da variável aleatória gaussiana W_n de média zero e variância σ^2 com $E\,[W_n W_m] = 0$, $n \neq m$.

a) Assumindo que as hipóteses H_j são equiprováveis, mostre que o teste de Bayes de mínima probabilidade de erro decide pela hipótese H_j se $T_j(\mathbf{x}) > T_i(\mathbf{x})$, $\forall i \neq j$, onde

$$T_j(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}\,[n]\,s_j\,[n] - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} s_j^2\,[n]\,.$$

b) Assumindo a seguir que as seqüências $s_i[n]$ e $s_j[n]$ são ortogonais se $i \neq j$, mostre que as variáveis aleatórias $T_i(\mathbf{x})$ e $T_j(\mathbf{x})$ são independentes.

Sugestão: Mostre que $T_i(\mathbf{x})$ e $T_j(\mathbf{x})$ são descorrelacionadas e, usando o fato de que são também conjuntamente gaussianas, conclua que são independentes.

c) Usando o resultado do item (b) e assumindo que $\sum_{n=0}^{N-1} s_j^2[n] = \varepsilon$, $\forall j = 0, \ldots, M-1$, deduza uma expressão para a probabilidade de erro de decisão

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} P(\{T_i < \max[T_0, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_{M-1}]\} \mid H_i)\, P(H_i).$$

Problema 7 Em um sistema de sonar digital, deseja-se decidir entre as hipóteses

$$H_0\colon x[n] \quad = \quad w[n] \qquad n = 0, \ldots N-1 \tag{16}$$

$$H_1\colon x[n] \quad = \quad \begin{cases} w[n] & n = 0, 1, \ldots, n_o - 1, n_o + M, \ldots, N-1 \\ A\cos(2\pi f_0 n + \phi) + w[n] & n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 + M - 1 \end{cases} \tag{17}$$

onde A, ϕ e f_0, $0 < f_0 < 0.5$, são parâmetros determinísticos desconhecidos e $\{W_n\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas com $E\{W_n\} = 0$ e $E\{W_n W_m\} = \sigma^2 \delta[n-m]$.

Usando as aproximações usuais vistas em aula, proponha um teste GLRT para decidir entre as hipóteses H_0 e H_1 (sugestão: ver Kay, vol.2, capítulo 7, seções 7.8 e anteriores).