

## ELE-33: Aula de Exercícios # 6

**Problema 1** Seja  $X$  uma variável aleatória real e  $\mathbf{Y}$  um vetor aleatório real de dimensão  $M \times 1$ . Dada uma realização observada  $\mathbf{y}$  do vetor aleatório  $\mathbf{Y}$ , deseja-se obter a melhor estimativa linear

$$\hat{x}(\mathbf{y}) = a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_M y_M \quad (1)$$

da realização desconhecida  $x$  da variável  $X$  de modo que o erro quadrático médio de estimação

$$\varepsilon^2 = E \left\{ [X - (a_0 + a_1 Y_1 + \dots + a_M Y_M)]^2 \right\} \quad (2)$$

seja mínimo.

a) Mostre que os coeficientes  $\{a_0, a_1, \dots, a_M\}$  que minimizam (2) satisfazem o sistema de equações

$$a_0 + \underline{\mu}_y^T \mathbf{a} = \mu_x \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_y \mathbf{a} = \mathbf{R}_{xy}^T - a_0 \underline{\mu}_y \quad (4)$$

onde  $\underline{\mu}_y = E \{ \mathbf{Y} \}$ ,  $\mathbf{R}_y = E \{ \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \}$ ,  $\mathbf{R}_{xy} = E \{ X \mathbf{Y}^T \}$  e  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]^T$ .

b) Resolva o sistema dado pelas equações (3) e (4) e, usando as propriedades vistas em aula, mostre que a estimativa de mínimo erro quadrático médio com estrutura como em (1) é dada por

$$\hat{x}(\mathbf{y}) = \mu_x + \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_y^{-1} (\mathbf{y} - \underline{\mu}_y) \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{xy} &= E \left\{ (X - \mu_x) (\mathbf{Y} - \underline{\mu}_y)^T \right\} \\ \mathbf{C}_y &= E \left\{ (\mathbf{Y} - \underline{\mu}_y) (\mathbf{Y} - \underline{\mu}_y)^T \right\}. \end{aligned}$$

Verifique que a estimativa (5) tem viés nulo, ou seja,  $E \{ \hat{X}(\mathbf{Y}) \} = \mu_x$ .

c) Mostre que o erro quadrático médio  $\varepsilon^2$  associado à estimativa ótima em (5) é dado por

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sigma_x^2 - \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{C}_{xy}^T.$$

**Problema 2** Em um sistema simplificado de radar digital, denote por  $H_1$  a hipótese “alvo presente” e por  $H_0$  a hipótese “alvo ausente”. Após um pré-processamento apropriado e amostragem no tempo do eco do radar, obtém-se no receptor um vetor de observações  $\mathbf{x}$  modelado como

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{sob a hipótese } H_1 \quad (6)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{n} \quad \text{sob a hipótese } H_0 \quad (7)$$

$$(8)$$

onde  $\mathbf{s}$  é um vetor determinístico  $N \times 1$  que representa o eco sem ruído do alvo e  $\mathbf{n}$  é uma realização (amostra) de um vetor aleatório  $\mathbf{N}$  de dimensão  $N \times 1$  com média  $\underline{\mu}_n = \mathbf{0}$  e matriz de correlação  $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}$ .

O chamado detector *Neyman-Pearson* decide pela hipótese  $H_1$  dadas as observações  $\mathbf{x}$  se

$$\frac{f_{\mathbf{x}|H_1}(\mathbf{x} | H_1)}{f_{\mathbf{x}|H_0}(\mathbf{x} | H_0)} > \gamma. \quad (9)$$

onde  $\gamma$  é um limiar fixado de acordo com a probabilidade desejada de falso alarme do sistema. Caso contrário, se a razão à esquerda em (9) for menor ou igual ao limiar, decide-se pela hipótese  $H_0$ . Em (9),  $f_{\mathbf{x}|H_i}(\mathbf{x} | H_i)$  denota a função densidade de probabilidade condicional do vetor  $\mathbf{X}$  dada a hipótese  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ .

a) Mostre que se  $\mathbf{N}$  for modelado como um vetor gaussiano, então o teste de hipóteses (9) é equivalente ao teste

$$\mathbf{s}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \gamma + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s} . \quad (10)$$

b) Verifique que, no caso particular, em que  $\mathbf{N}$  é um ruído dito “branco”, i.e.,  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$  onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, então o teste (10) é equivalente ao teste

$$\sum_{i=1}^N s_i x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \hat{\gamma} . \quad (11)$$

onde

$$\hat{\gamma} = \sigma^2 \ln \gamma + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2 .$$

O detector (11) é conhecido na literatura como detector de correlação.

c) Usando as propriedades vistas em aula sobre transformações lineares de vetores aleatórios, calcule a média e a variância da variável de decisão

$$l = \mathbf{s}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}$$

condicionadas respectivamente às hipóteses  $H_1$  e  $H_0$ . Use então esses resultados para calcular as probabilidades de detecção e falso alarme do detector (10).

**Problema 3** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias com médias  $\mu_{x_1}$  e  $\mu_{x_2}$  e variâncias respectivamente  $\sigma_{x_1}^2$  e  $\sigma_{x_2}^2$ . Denote ainda por  $\sigma_{x_1 x_2}$  a covariância entre  $X_1$  e  $X_2$ . Defina a seguir a variável aleatória

$$Z = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 \quad (12)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são coeficientes reais arbitrários.

a) Calcule a média  $\mu_z$  e a variância  $\sigma_z^2$  da variável aleatória  $Z$  em função de  $\mu_{x_1}$ ,  $\mu_{x_2}$ ,  $\sigma_{x_1}^2$ ,  $\sigma_{x_2}^2$  e  $\sigma_{x_1 x_2}$ .

b) Defina sem seguida a função característica conjunta  $\Phi(\omega_1, \omega_2)$  das variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  como sendo a função complexa

$$\Phi_{x_1 x_2}(\omega_1, \omega_2) = E \{ \exp [j (\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)] \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [j (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)] f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$

Usando o resultado do item (a), calcule  $\Phi_{x_1 x_2}(\omega_1, \omega_2)$  no caso em que  $X_1$  e  $X_2$  são duas variáveis conjuntamente gaussianas.

Dica: Observe primeiro que, se as variáveis  $X_1$  e  $X_2$  são conjuntamente gaussianas, então a variável aleatória  $Z$  em (12) também é gaussiana (reflita por quê!) A seguir, use o fato de que a função geradora de momentos de uma variável gaussiana  $Z$  de média  $m_z$  e variância  $\sigma_z^2$  é dada por

$$\Phi(s) = E \left\{ e^{sZ} \right\} = \exp \left( m_z s + \frac{\sigma_z^2 s^2}{2} \right) \quad s \in \mathcal{C} .$$

Finalmente, faça  $s = j$  e o problema estará resolvido.

c) Generalizando os resultados anteriores, obtenha uma expressão analítica para a função característica conjunta

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\underline{\omega}) = E \left\{ \exp \left[ j \underline{\omega}^T \mathbf{X} \right] \right\}, \quad \underline{\omega} \in \Re^N$$

onde  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$ ,  $N \geq 2$ , é um vetor aleatório gaussiano com média  $\underline{\mu}_x$  e matriz de covariância  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ .

**Problema 4** Seja  $\{\mathbf{X}_n\}$ ,  $n \geq 0$ , uma seqüência de vetores aleatórios reais de dimensão  $N \times 1$  tal que

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F} \mathbf{X}_n + \mathbf{G} \mathbf{U}_n \quad n \geq 0$$

onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes reais de dimensão respectivamente  $N \times N$  e  $N \times M$  e,  $\{\mathbf{U}_n\}$ ,  $n \geq 0$ , é uma seqüência de vetores aleatórios reais de dimensão  $M \times 1$  tais que

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{U}_n \} &= \mathbf{0} \quad \forall n \geq 0 \\ E \{ \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^T \} &= \mathbf{Q} \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Os vetores aleatórios  $\mathbf{X}_0$  e  $\{\mathbf{U}_n\}$ ,  $n \geq 0$ , são assumidos mutuamente independentes entre si. A matriz de covariância  $\mathbf{Q}$  é assumida positiva definida.

a) Verifique que o vetor aleatório  $\mathbf{X}_n$  pode ser escrito como

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{F}^n \mathbf{X}_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathbf{F}^{n-1-l} \mathbf{G} \mathbf{U}_l \quad n \geq 1$$

com  $\mathbf{F}^0 = \mathbf{I}$  (matriz identidade). Conclua então que, pelas hipóteses de independência estatística entre  $\mathbf{U}_n$  e  $\mathbf{X}_0$  e, entre  $\mathbf{U}_n$  e  $\{\mathbf{U}_k\}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , os vetores aleatórios  $\mathbf{X}_n$  e  $\mathbf{U}_n$  são estatisticamente independentes.

b) Defina agora

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n &= E \{ \mathbf{X}_n \} \\ \mathbf{C}_n &= E \left\{ (\mathbf{X}_n - \mathbf{m}_n)(\mathbf{X}_n - \mathbf{m}_n)^T \right\}. \end{aligned}$$

Mostre que  $\mathbf{m}_n$  e  $\mathbf{C}_n$  podem ser calculados para pelas recursões

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{F} \mathbf{m}_n \quad n \geq 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F} \mathbf{C}_n \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \quad n \geq 0 \quad (14)$$

com condições iniciais  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_{\mathbf{X}_0}$  e  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_{\mathbf{X}_0}$ .

c) Mostre que, se existir a matriz

$$\mathbf{C}_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{F}^n \mathbf{G}) \mathbf{Q} (\mathbf{F}^n \mathbf{G})^T$$

então

$$\mathbf{C}_\infty = \mathbf{F} \mathbf{C}_\infty \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T$$

ou seja,  $\mathbf{C}_\infty$  é um ponto fixo da recursão (14).

**Problema 5** Sabe-se por experimentos passados que a vida útil de um determinado tipo de pneu é uma variável aleatória  $X$  com desvio-padrão conhecido  $\sigma = 5000$  quilômetros. Testam-se 64 amostras desse tipo de pneu e, a partir das vidas úteis medidas nessa amostra, obtém-se uma vida útil média  $\bar{X} = 25000$  quilômetros. Usando uma aproximação normal (gaussiana), estime o intervalo de confiança para a média real da variável aleatória  $X$  com nível de confiança 90 %. Justifique todos os seus cálculos.

Dado:  $0.95 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.645} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ .