ET-236: Lista de Exercícios #8

Problema 1 Seja $\mathcal{H}$ um sistema linear de tempo contínuo, invariante no tempo, com função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}.$$

Excitando-se o sistema $\mathcal{H}$ com um processo ruído branco estacionário em sentido amplo função densidade espectral de potência complexa $S_{xx}(s) = 1$, calcule

a) A função densidade espectral de potência complexa $S_{yy}(s)$ da resposta $Y(t)$ do sistema $\mathcal{H}$ à excitação $X(t)$.

b) A função de autocorrelação $R_{yy}(\tau)$ e a potência média $E\{Y_t^2\}$ do processo estocástico $Y(t)$.

Atenção: Note que $H(s)$ possui dois pólos *complexos conjugados*.

Problema 2 Sejam $Y[n]$ e $X[n]$ dois processos estocásticos reais de tempo discreto, conjuntamente estacionários e de média nula com funções densidade espectral de potência e densidade espectral de potência cruzada complexas respectivamente $S_{yy}(z)$, $S_{xx}(z)$ e $S_{xy}(z)$. Assuma ainda que $S_{xx}(z)$ admite a fatoração espectral

$$S_{xx}(z) = \sigma_x^2 H_{ca}(z) H_{ca}(z^{-1})$$

onde $H_{ca}(z)$ é a função de transferência de um sistema linear, invariante no tempo e causal, com todos os seus pólos e zeros no interior do círculo unitário.

a) Mostre que, no caso particular em que $Y[n] = X[n-1]$, o filtro IIR causal de erro quadrático médio mínimo para estimar X_n a partir das observações $\{y_k\}$, $-\infty < k \leq n$, é dado por

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_x^2 H_{ca}(z)} \left[\frac{z\, S_{xx}(z)}{H_{ca}(z^{-1})} \right]_+ . \tag{1}$$

b) Assuma em seguida que $X[n]$ é um processo AR(2) com função densidade espectral de potência complexa

$$S_{xx}(z) = \frac{\sigma_x^2}{A_p(z)\, A_p(z^{-1})} \tag{2}$$

onde

$$A_p(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = (1 - z_1\, z^{-1})(1 - z_2\, z^{-1}) \qquad z_1 \neq z_2 \ .$$

Mostre que, nesse caso particular, a expressão (1) se reduz a

$$H(z) = -a_1 - a_2 z^{-1} \,,$$

ou seja, o preditor linear de erro quadrático médio mínimo para X_n dados $\{x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots\}$ é igual a

$$\hat{x}_n = -a_1 x_{n-1} - a_2 x_{n-2} \ .$$

Questão 4 Sejam $Y[n]$ e $X[n]$ dois processos estocásticos reais de tempo discreto, conjuntamente estacionários e de média nula com

$$S_{yy}(z) = \frac{1.6(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \qquad (3)$$

$$S_{xy}(z) = \frac{0.72}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \qquad (4)$$

para $0.8 <\mid z \mid< 1.25$. Em (3), $S_{yy}(z)$ denota a transformada Z da função de autocorrelação $R_{yy}[l] = E\{Y_{n+l} Y_n\}$. Em (4), $S_{xy}(z)$ denota por sua vez a transformada Z da função de correlação cruzada $R_{xy}[l] = E\{X_{n+l} Y_n\}$. Obtenha a função de transferência do filtro de Wiener IIR causal para estimar o valor assumido pela variável aleatória D_n dadas as observações $\{y_k\}$, $-\infty < k \leq n$ nas seguintes situações:

a) $D_n = X_{n+3}$.

b) $D_n = X_{n-3}$.

Problema 4 Seja $\mathcal{H}$ um sistema linear invariante no tempo modelado pela equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$x'(t) + x(t) = u(t) \ . \qquad (5)$$

Seja $X(t)$ um processo estocástico estacionário obtido excitando-se o sistema linear descrito por (5) com um processo ruído branco estacionário $U(t)$ de média zero e função de autocorrelação $R_{uu}(\tau) = 2\delta(\tau)$. Suponha em seguida que se observa o processo estocástico

$$Y(t) = X(t) + N(t)$$

onde $N(t)$ é um processo estacionário independente de $X(t)$ com média zero e função de autocorrelação

$$R_{nn}(\tau) = \delta(\tau) + 3\exp(- \mid \tau \mid) \qquad \tau \in \Re \ .$$

a) Obtenha a função de transferência $W(s)$ e a correspondente resposta ao impulso $w(\tau)$ de um possível filtro linear causal e estável que 'branqueie" o processo observado $Y(t)$, ou seja, ache um $W(s)$ tal que

$$S_{vv}(s) = S_{yy}(s)\, W(s)\, W^*(-s^*) = k$$

onde k é uma constante real. Construa a seguir um modelo de sistema linear invariante no tempo descrito por uma equação diferencial ordinária para gerar o processo $Y(t)$ a partir de um processo ruído branco estacionário $V(t)$.

b) Baseado no resultado do item (a), ache a função de transferência

$$H_c(s) = \frac{1}{k} W(s) \left[S_{xy}(s)\, W^*(-s^*) \right]_+$$

e a correspondente resposta ao impulso $h_c(\tau)$ do filtro de Wiener <u>causal</u> para estimar o valor assumido por $X(t)$ no instante t a partir das observações $Y(s)$, $s \leq t$.