

2.5 Guia de ondas retangular

O guia de ondas retangular é uma região do espaço delimitada por dois condutores em $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$

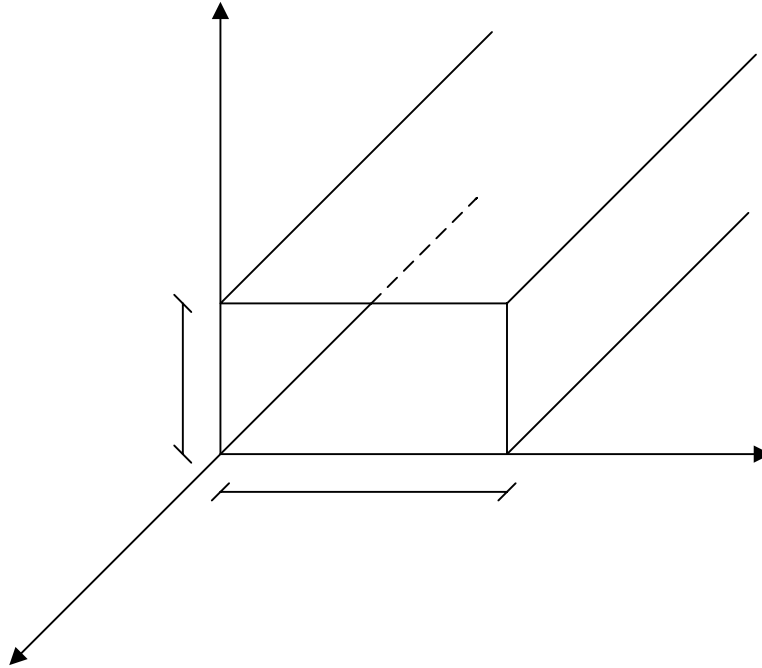


Figura 8 – Guia de ondas retangular

As soluções da equação de onda para o sistema de coordenadas retangular já foram obtidas anteriormente nas equações (2.38) e (2.39), apliquemos estas soluções às condições de contorno definidas pelo guia de ondas retangular para os modos TE e TM

2.5.1 Solução do modo TE

Partindo da equação de onda:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)H_z = 0 \quad (2.68)$$

Chegou-se a solução apresentada na equação (2.40)

$$H_z(x, y) = [A' \cdot \cos(k_x \cdot x) + B' \cdot \sin(k_x \cdot x)] [C' \cdot \cos(k_y \cdot y) + D' \cdot \sin(k_y \cdot y)] \quad (2.69)$$

As equações (2.26) nos mostram que E_x e E_y são dependentes de $\frac{\partial H_z}{\partial y}$ e $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ respectivamente, devido ao fato de que as paredes do guia são metálicas, tem-se que:

$$E_x = 0 \text{ em } y = 0 \text{ e em } y = b, \text{ logo } \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \text{ em } y = 0 \text{ e em } y = b \quad (2.70)$$

$$E_y = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e em } x = a, \text{ logo } \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0 \text{ e em } x = a \quad (2.71)$$

Derivando-se o campo H_z da equação (2.69) em relação a x e em relação a y , tem-se que:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \{[C' \cdot \cos(k_y \cdot y) + D' \cdot \sin(k_y \cdot y)][-A' k_x \cdot \sin(k_x \cdot x) + B' k_x \cos(k_x \cdot x)]\} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \{[A' \cdot \cos(k_x \cdot x) + B' \cdot \sin(k_x \cdot x)][-C' k_y \cdot \sin(k_y \cdot y) + D' k_y \cos(k_y \cdot y)]\} \quad (2.73)$$

Aplicando-se as condições de contorno (2.70) e (2.71) nas equações (2.72) e (2.73), tem-se que:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 = \{[C' \cdot \cos(k_y \cdot y) + D' \cdot \sin(k_y \cdot y)][-A' k_x \cdot \sin(k_x \cdot 0) + B' k_x \cos(k_x \cdot 0)]\} \rightarrow B' = 0 \quad (2.74)$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 = \{[A' \cdot \cos(k_x \cdot x) + B' \cdot \sin(k_x \cdot x)][-C' k_y \cdot \sin(k_y \cdot 0) + D' k_y \cos(k_y \cdot 0)]\} \rightarrow D' = 0 \quad (2.75)$$

Desta forma, a equação(2.69) passa a ser escrita da seguinte forma;

$$H_z = H_0 \cos(k_x \cdot x) \cdot \cos(k_y \cdot y) \quad (2.76)$$

Mas,

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)_{y=b} = 0 \quad (2.77)$$

Portanto, as constantes k_x e k_y , podem ser escritas como:

$$k_x = \frac{m \cdot \pi}{a} \quad (2.78)$$

$$k_y = \frac{n \cdot \pi}{b}$$

Desta forma a equação (2.75) pode ser reescrita como:

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.79)$$

O número de onda de corte (k_c) é então escrito da seguinte maneira:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.80)$$

Os campos elétricos e magnéticos transversais são determinados através das equações (2.26), tal que:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{j\eta k_y f}{k_c f_c} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{j\eta k_x f}{k_c f_c} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ H_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{E_y}{Z_{TE}} \\ H_y &= \frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{E_x}{Z_{TE}} \quad Z_{TE} = \eta \left(1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

2.5.1.1 Propriedades gerais dos modos TE

As frequências de corte para os modos TE são dadas por:

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (2.82)$$

Os comprimentos de onda de corte para os modos TE são dados por:

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (2.83)$$

A partir da relação $\beta^2 = k^2 - k_c^2$, tem-se que:

$$\beta = \frac{2.\pi}{\lambda_g}; k = \frac{2.\pi}{\lambda} \text{ e } k_c = \frac{2.\pi}{\lambda_c}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (2.84)$$

Sumário das principais características:

- Impedância de onda $Z_{TE} = \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$
- Constante de propagação (sem perdas) $\gamma = j.\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2}$
- Comprimento de onda de corte $\lambda_c = \frac{2.\pi}{k_c}$
- Comprimento de onda no guia $\lambda_g = \lambda \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$
- Velocidade de grupo $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} \right)$
- Velocidade de fase $v_f = \frac{\omega}{\beta} = c \left(\frac{\lambda_g}{\lambda} \right)$

2.5.1.2 Modo dominante TE₁₀

O modo dominante de propagação (modo com o maior comprimento de onda de corte) é o modo TE₁₀. O seu comprimento de onda de corte é dado por;

$$\lambda_{c(TE_{10})} = 2.a \quad (2.85)$$

Na equação (2.85) a é a maior dimensão do guia.

Para este modo, as equações dos campos eletromagnéticos são dadas por:

$$\begin{aligned}
H_z &= H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \\
E_x &= H_y = 0 \\
E_y &= -\frac{j \cdot \beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \\
H_x &= \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right)
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Na prática, é importante dimensionar o guia tal que somente um modo de propagação exista, a fim de evitar a presença simultânea de modos indesejáveis. O modo TE₁₀ é usado quase que exclusivamente em aplicações que exijam guias retangulares.

Nas paredes do guia de onda são induzidas correntes e cargas que estão associados aos campos através das condições de contorno:

Exemplo 1 – Determinar a distribuição de correntes induzidas nas paredes de um guia, quando é transmitido o modo dominante.

Solução

As condições de contorno determinam que a densidade superficial de corrente induzida na parede do guia é dado por:

$$\hat{e}_n \times \vec{h} = \vec{J}_s \tag{2.87}$$

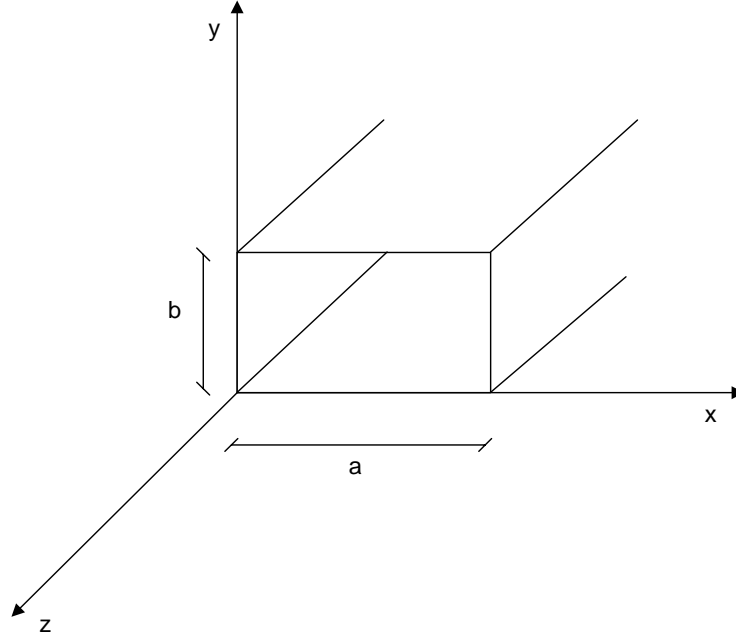


Figura 9 – Figura do exemplo 1

No modo dominante tem-se que:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \hat{z} \\ H_x &= \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \hat{x} \end{aligned} \quad (2.88)$$

As paredes do guia são definidas por $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

1) $x = 0$

Em $x = 0$, tem-se que

$$H_x = 0; H_z = H_0 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}; \hat{e}_n = \hat{x} \quad (2.89)$$

Portanto, aplicando-se a equação (2.86), tem-se que:

$$\vec{J}_y = \hat{x} \times H_z = -H_z \cdot \hat{y} \quad (2.90)$$

Os valores instantâneos são obtidos por:

$$\begin{aligned} \vec{j}_x &= \vec{j}_z = 0 \\ \vec{j}_y &= \text{Re}(\vec{J}_y \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}) = -H_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{y} \end{aligned} \quad (2.91)$$

2) $\mathbf{x} = \mathbf{a}$

Em $x = a$, tem-se que:

$$H_x = 0; H_z = -H_0 \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}; \hat{e}_n = -\hat{x} \quad (2.92)$$

Assim, realizando o mesmo procedimento feito anteriormente, tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{j}_x &= \vec{j}_z = 0 \\ \vec{j}_y &= \text{Re}(\vec{J}_y \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}) = -H_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{y} \end{aligned} \quad (2.93)$$

3) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$

Em $y = 0$, tem-se que:

$$H_x = \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot \hat{x}; H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot \hat{z}; \hat{e}_n = \hat{y} \quad (2.94)$$

Logo, aplicando-se as condições de contorno, tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{y} \times (H_x \cdot \hat{x} + H_z \cdot \hat{z}) = -H_x \cdot \hat{z} + H_z \cdot \hat{x} \\ H_x &= \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}; H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \\ \vec{j} &= \text{Re}(\vec{J} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}) = -\frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{z} + H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{x} = \\ &= H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{x} + \frac{\beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \cdot \hat{z} \end{aligned} \quad (2.95)$$

4) $\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$H_x = \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot \hat{x}; H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot \hat{z}; \hat{e}_n = -\hat{y} \quad (2.96)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se que:

$$\vec{J} = -\vec{y} \times (H_x \hat{x} + H_z \hat{z}) = +H_x \hat{z} - H_z \hat{x}$$

$$H_x = \frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}; \quad H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

$$\vec{j} = \text{Re}(\vec{J} \cdot e^{j \cdot \omega t}) = +\frac{j \cdot \beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta \cdot z) \hat{z} - H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta \cdot z) \hat{x} =$$

$$= -H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta \cdot z) \hat{x} - \frac{\beta \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta \cdot z) \hat{z}$$

(2.97)

Abaixo, os gráficos correspondentes as correntes nas paredes do guia de ondas:

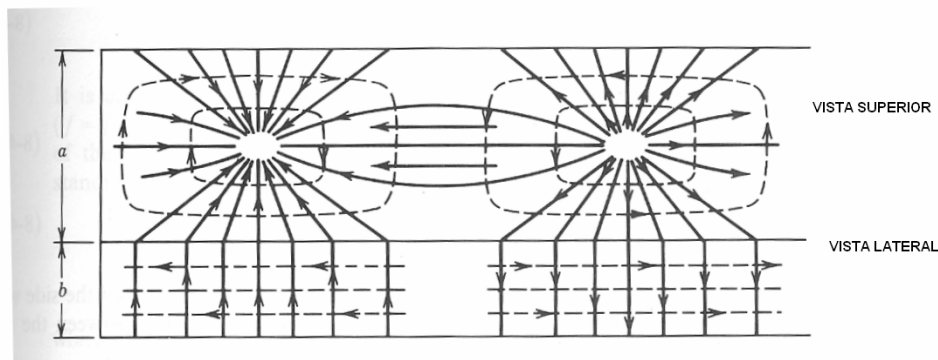


Figura 10 – Distribuição de corrente no modo TE₁₀(linha cheia)

Exemplo 2 – Determinar a distribuição de cargas induzidas nas paredes de um guia retangular quando é transmitido o modo dominante TE₁₀.

Solução: A distribuição de cargas induzidas é determinada a partir da condição de contorno:

$$\hat{e}_n \bullet (\epsilon \vec{e}) = \sigma \quad (2.98)$$

Assim, como no modo TE₁₀, $E_x = E_z = 0$, tem-se que não há carga induzida em $x = 0$ e em $x = a$.

O campo eletromagnético E_y pode ser escrito como:

$$\vec{E}_y = -\frac{j \cdot \beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \hat{y} \quad (2.99)$$

Desta forma, o cálculo da distribuição de cargas induzidas reduz-se a $y = 0$ e a $y = b$.

a) $y = 0$

Para $y = 0$, tem-se que o vetor normal é dado por $\hat{e}_n = \hat{y}$. Portanto, aplicando-se a condição de contorno da equação (2.94), tem-se que:

$$\sigma = \varepsilon \cdot -\frac{j \cdot \beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \quad (2.100)$$

O valor instantâneo é dado por:

$$\sigma = \text{Re}\left(\varepsilon \cdot -\frac{j \cdot \beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) = \varepsilon \cdot \frac{\beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \quad (2.101)$$

b) $y = b$

Para $y = b$, tem-se que o vetor normal é dado por $\hat{e}_n = -\hat{y}$. Portanto, aplicando-se a condição de contorno da equação (2.95) tem-se que o valor instantâneo da densidade de carga é dado por:

$$\sigma = \text{Re}\left(-\varepsilon \cdot -\frac{j \cdot \beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}\right) = -\varepsilon \cdot \frac{\beta \cdot Z_{TE} \cdot H_0}{k_c} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta \cdot z) \quad (2.102)$$

Estas duas equações indicam uma concentração de cargas de sinais opostos em $y = 0$ e $y = b$ com máximos em $x = \frac{a}{2}$, o que condiz com a distribuição de corrente elétrica calculada no exemplo anterior.

2.5.2 Ondas Magnéticas Transversais (TM ou Tipo E)

Para ondas do tipo TM, a equação de onda é:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)H_z = 0 \quad (2.103)$$

Cuja solução já foi determinada e é igual a:

$$E_z = (A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x))(C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y)) \quad (2.104)$$

Tal que $E_z = 0$ para $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$, o que determina a seguinte solução:

$$E_z = E_0 \cdot \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y) \quad (2.105)$$

Na equação (2.105) as constantes k_x e k_y são definidas idênticamente aos modos TE pelas equações (2.78)

Assim, podemos reescrever a equação (2.105) tal como:

$$E_z = E_0 \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad (2.106)$$

Os modos são designados por $TM_{m,n}$, onde \mathbf{m} e \mathbf{n} , similarmente aos modos TE, indicam as variações meio senoidais nas direções x e y. Notar que \mathbf{m} ou \mathbf{n} não podem ser nulos.

Utilizando a expressão do campo elétrico obtida anteriormente, tem-se que:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{j \cdot k_y \cdot f}{k_c \cdot \eta \cdot f_c} \cdot E_0 \cdot \sin(k_x \cdot x) \cos(k_y \cdot y) \\ H_y &= -\frac{j \cdot \omega \cdot \varepsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{j \cdot k_x \cdot f}{k_c \cdot \eta \cdot f_c} \cdot E_0 \cdot \cos(k_x \cdot x) \sin(k_y \cdot y) \\ E_x &= Z_{TM} \cdot H_y \\ E_y &= -Z_{TM} \cdot H_x \\ Z_{TM} &= \eta \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad f_c = \frac{k_c}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot 2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.107)$$

O modo dominante é o modo TM_{11} com um comprimento de onda de corte

$$\lambda_c = \frac{2 \cdot a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.108)$$

Observa-se abaixo um gráfico onde se vê as frequências de corte dos diversos modos em relação à frequência de corte do modo TE_{10} , como função da relação entre as dimensões a e b.

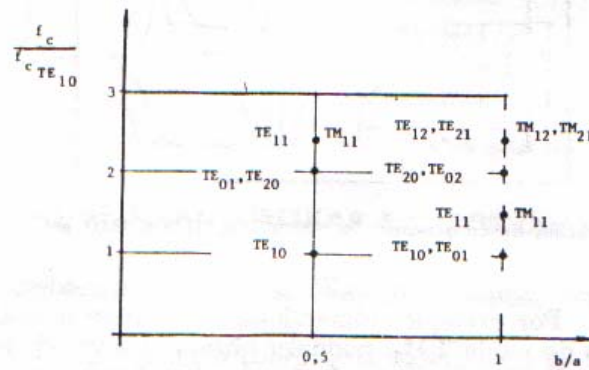


Figura 11 – Frequências de cortes dos modos em guias retangulares em relação ao modo TE_{10}

Característica de fase pra ondas guiadas.

$$\beta^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2 \quad (2.109)$$

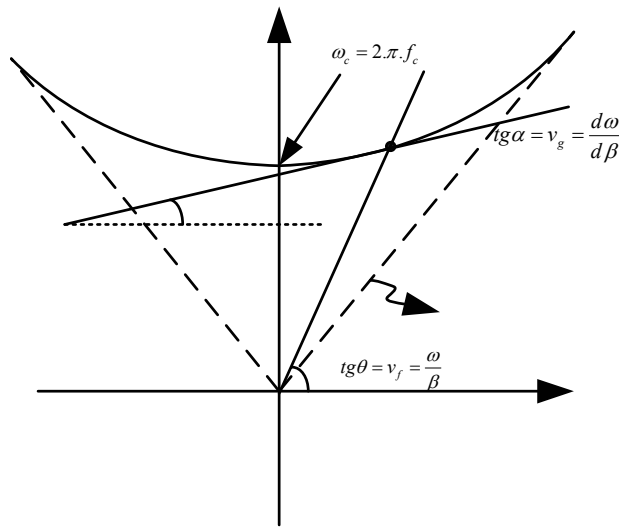


Figura 12 – Característica de fase para ondas se propagando em guia de ondas.

Observar que a figura acima é tal que constantes de fase negativas e positivas representam as direções de propagação da onda. Para frequências consideravelmente acima da frequência de corte, as velocidades de fase e de grupo tendem à velocidade da luz. O coeficiente angular em qualquer ponto da curva representa a velocidade de grupo da onda.

2.5.3 Determinação dos modos que podem se propagar

Da equação (2.54) tem-se que:

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 = 4.\pi^2 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 - \left[\left(\frac{m}{2.a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2.b} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.110)$$

À partir da equação (2.110) é possível verificar que:

$$\text{Se } \left[\left(\frac{m}{2.a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2.b} \right)^2 \right] > \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \beta^2 > 0 \text{ (Há propagação)}$$

$$\text{Se } \left[\left(\frac{m}{2.a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2.b} \right)^2 \right] < \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \beta^2 < 0 \text{ (Não há propagação)}$$

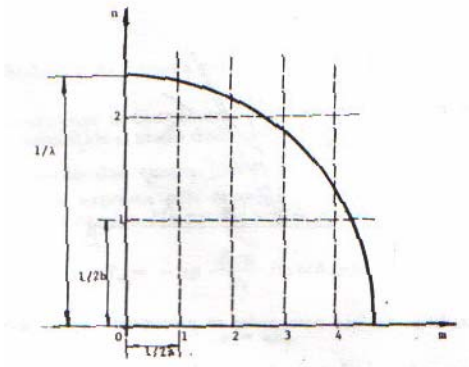


Figura 13 – Determinação dos modos propagantes.

Exemplo 3: Em um guia de ondas retangular de dimensões $a = 3 \text{ cm}$ e $b = 1,5 \text{ cm}$, é emitido um sinal de frequência 24 GHz . Determinar quantos e quais modos podem se propagar.

Solução: Conforme visto na figura 13, tem-se que os modos que podem se propagar são:

$$\text{TE}_{m,n} = 1,0; 2,0; 3,0; 4,0; 0,1; 1,1; 2,1; 3,1; 4,1; 0,2; 1,2; 2,2.$$

$$\text{TM}_{m,n} = 1,1; 2,1; 3,1; 4,1; 1,2; 2,2$$

2.5.4 Traçado de das linhas de força em guias retangulares

As linhas de força elétrica e magnética são, em geral, difíceis de construir a não ser para os modos mais simples. De forma geral, é possível construir os demais modos à partir de três modos básicos : O TE_{10} , o TE_{11} e o TM_{11} .

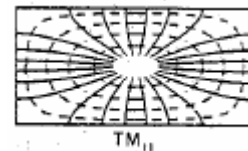
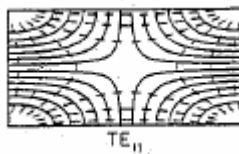
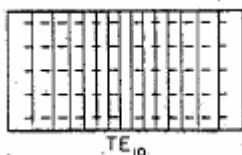


Figura 14 – Modos fundamentais utilizados para o traçado das linhas de força em guias retangulares

(——— - Campo elétrico; - - - - - Campo magnético)

Fonte: Plot of modal fields in rectangular and circular waveguides, C.S Lee, W. Lee and S. L. Chuang, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 33. No 3, Mar 1985, pp 271-274.

Os índices m e n representam quantas vezes a estrutura de campo acima descrita se repete na horizontal e na vertical. Assim, o modo TE_{03} é uma repetição vertical do modo TE_{10} 3 vezes:

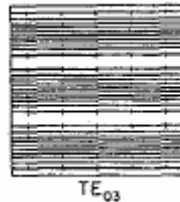


Figura 15 – Modo de propagação TE_{03}

Da mesma forma, o modo TE_{23} é igual ao modo TE_{11} repetido 2 vezes na horizontal e 3 na vertical como se observa na figura abaixo:

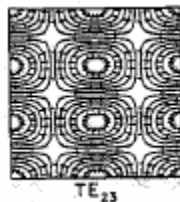


Figura 16 – Modo de propagação TE_{23}

Observe que a condição de perpendicularidade do campo elétrico nas paredes metálicas deve ser respeitada no traçado.

Um outro exemplo: Traçado do modo TM_{32} : Basta tomarmos o modo TM_{11} 3 vezes na horizontal e 2 na vertical:

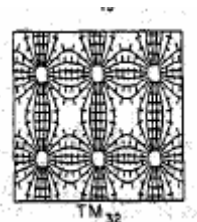


Figura 17 – Modo de propagação TM_{32}

Assim, partindo-se das configurações mostradas na figura 14, tem-se que:

Modo TM_{mn} – É uma configuração de $m \times n$ modos TM_{11}
 Modo $TE_{mn}(n \neq 0)$ - É uma configuração de $m \times n$ modos TE_{11}
 Modo TE_{0n} ou TE_{m0} – É uma repetição horizontal ou vertical do modo TE_{10} .

2.6 Guia de Ondas Circular e Cabos Coaxiais

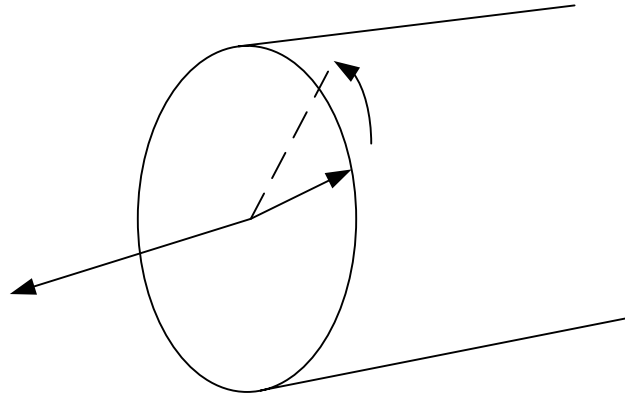


Figura 18 – Geometria do guia de ondas circular

Em coordenadas cilíndricas, tem-se, para os modos TE e TM, as seguintes equações:

$$\nabla_T^2 + k_c^2 \cdot \begin{cases} E_z = 0 \text{ (Ondas TM)} \\ H_z = 0 \text{ (Ondas TE)} \end{cases} \quad (2.111)$$

Onde o operador laplaciano transversal é dado por:

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.112)$$

Portanto, aplicando-se o método de separação de variáveis, tem-se que:

$$\left. \begin{matrix} E_z \\ H_z \end{matrix} \right\} = R(r) \cdot F(\phi) \quad (2.113)$$

Donde, obtemos as seguintes equações:

$$R'' + \frac{1}{r} \cdot R' + \left(k_c^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) \cdot R = 0 \quad (2.114)$$

$$F'' + \nu^2 \cdot F = 0 \quad (2.115)$$

As soluções da equação (2.114) são as funções de Bessel, tal que:

$$R(r) = A.J_\nu(k_c.r) + B.N_\nu(k_c.r) \quad (2.116)$$

Na equação (2.116) as funções $J_\nu(k_c.r)$ e $N_\nu(k_c.r)$ são as funções de Bessel ordinárias de 1ª espécie e de 2ª espécie. Devido ao comportamento da função de Bessel ordinária de 2ª espécie ($N_\nu(k_c.r)$) em $r = 0$, tem-se que o coeficiente B deve ser igual a zero. A solução final da equação (2.111) fica:

$$\left. \begin{matrix} E_z \\ H_z \end{matrix} \right\} = A'.\cos(n.\phi).J_n(k_c.r) \quad (2.117)$$

Devido ao fato de que a função é periódica em relação a ϕ , o fator ν deve ser um inteiro. Não há perda de generalidade em se considerar somente a função em seno ou em cosseno.

2.6.1 Modo TE ($E_z=0$)

Para este modo, tem-se que a solução para a componente longitudinal do campo magnético H_z é dada por:

$$H_z = H_0.J_n(k_c.r).\cos(n.\phi) \quad (2.118)$$

Tal que, por condições de contorno, tem-se que $\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$, para $r = a$. Assim, tem-se que:

$$J'_n(k_c.a) = 0 \quad (2.119)$$

A equação acima determina um número finito de raízes desiguais designadas por $p'_{n\ell}$. O modo TE correspondente é referido como $TE_{n\ell}$, onde n indica o número de variações cíclicas segundo ϕ e o segundo ℓ , se refere a raiz de ordem ℓ da função de Bessel $J'_n(k_c.a)$. Portanto:

$$k_c.a = p'_{n\ell} \rightarrow k_c = \frac{p'_{n\ell}}{a} \rightarrow \lambda_c = \frac{2.\pi.a}{p'_{n\ell}} \quad (2.120)$$

Abaixo tem-se uma tabela com alguns valores das raízes de $J'_n(k_c.a)$

n(vertical) ℓ(horizontal)	-	1	2	3
0		3,832	7,016	10,174
1		1,841	5,331	8,536
2		3,054	6,706	9,970

Tabela 2 – raízes da função de Bessel $J'_n(k_c.a)$

O modo com a frequência de corte mais baixa e portanto o modo dominante é o modo TE₁₁, cujo comprimento de onda de corte é dado por:

$$\lambda_{c(TE_{11})} = \frac{2.\pi.a}{1,841} = 3,41.a \quad (2.121)$$

Similarmente ao feito para o guia de ondas retangular, podemos escrever as componentes de campo E_r, E_ϕ, H_r e H_ϕ em função de E_z e H_z , tal que:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\beta \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega.\mu}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\beta}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega.\mu \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ H_r &= \frac{j}{k_c^2} \left(\frac{\omega.\varepsilon}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ H_\phi &= -\frac{j}{k_c^2} \left(\omega.\varepsilon \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Assim, as demais componentes de campo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cdot J_n(k_c.r) \cdot \cos(n.\phi) \cdot e^{-j.\beta.z} \\ E_r &= -\frac{j.\omega.\mu}{k_c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = \frac{j.n.\eta.f}{k_c.r.f_c} \cdot H_0 \cdot J_n(k_c.r) \cdot \sin(n.\phi) \cdot e^{-j.\beta.z} \\ E_\phi &= \frac{j.\omega.\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{j.\eta.f}{f_c} \cdot H_0 \cdot J'_n(k_c.r) \cdot \cos(n.\phi) \cdot e^{-j.\beta.z} \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$H_\phi = \frac{E_r}{Z_{TE}} \quad H_r = -\frac{E_\phi}{Z_{TE}} \quad Z_{TE} = \eta \cdot \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

2.6.2 Modo TM ($H_z=0$)

Para o modo TM tem-se que a solução para o campo elétrico longitudinal E_z é dada por:

$$E_z = E_0 \cdot J_n(k_c.r) \cdot \cos(n.\phi) \quad (2.124)$$

Da condição de contorno $E_z(a) = 0$, tem-se que:

$$J_n(k_c.a) = 0 \rightarrow k_c.a = p_{nl} \rightarrow \lambda_{c(TM)} = \frac{2.\pi.a}{p_{nl}} \quad (2.125)$$

Abaixo tem-se uma tabela das raízes $p_{n\ell}$ das funções de Bessel $J_n(k_c \cdot a) = 0$

n(vertical) ℓ(horizontal)	-	1	2	3	4
0		2,405	5,520	8,654	11,792
1		3,832	7,016	10,174	13,324
2		5,135	8,417	11,620	14,796

Tabela 3 – raízes da função de Bessel $J_n(k_c \cdot a)$

Da tabela (3), tem-se que o modo TM dominante é modo TM_{01} , cujo comprimento de onda de corte λ_c é dado por:

$$\lambda_{c(TM_{11})} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{2,40} = 2,61 \cdot a \quad (2.126)$$

As demais componentes de campo podem ser escritas como:

$$E_z = E_0 \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \phi) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

$$H_r = \frac{j \cdot \omega \cdot \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\frac{j \cdot n \cdot f}{k_c \cdot \eta \cdot r \cdot f_c} \cdot E_0 \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot \sin(n \cdot \phi) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

$$E_\phi = -\frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{j \cdot f}{\eta \cdot f_c} \cdot E_0 \cdot J_n'(k_c \cdot r) \cdot \cos(n \cdot \phi) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} \quad (2.127)$$

$$E_\phi = -H_r \cdot Z_{TM} \quad E_r = H_\phi \cdot Z_{TM} \quad Z_{TM} = \eta \cdot \left[1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Representam-se abaixo as frequências de corte em relação ao modo dominante TE_{11} .

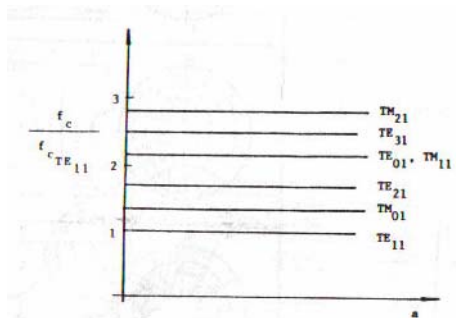


Figura 19 – Frequência de corte dos modos em guias circulares em relação ao modo dominante TE_{11}

Observações:

- 1 – A faixa do modo dominante é estreita, pois não há muita diferença entre um modo e o modo seguinte.
- 2 – Devido à simetria circular a onda propagante é circularmente polarizada.

Exemplo 3 – Um guia de ondas de seção transversal circular deve transmitir o modo dominante na frequência de 10 GHz. As dimensões do guia são tais que $\frac{\lambda}{\lambda_c} = 0,5$ para este modo. Calcular o diâmetro do guia.

Solução: No espaço livre o comprimento de onda é $\lambda = 3 \text{ cm}$. Portanto $\lambda_c = 6 \text{ cm}$. Da equação (2.121), tem-se que:

$$a = \frac{\lambda_c}{3,41} = 1,76 \text{ cm} \quad (2.128)$$

2.6.3 Modos de ordem superior em cabos coaxiais

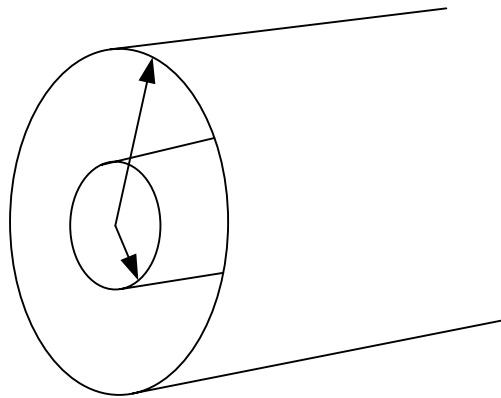


Figura 20 – Geometria do cabo coaxial

Os cabos coaxiais prestam-se a guiagem de ondas no modo TEM, porém quando a distância entre os condutores é da ordem de $\frac{\lambda}{2}$, tem-se a possibilidade da presença de modos TE ou TM.

Dado que a presença do condutor interno elimina a singularidade em $r = 0$, a função de Bessel ordinária de segunda espécie é mantida. Assim, para o modo TE tem-se que:

$$H_z = [A.J_n(k_c.r) + B.N_n(k_c.r)] \cos(n.\phi) \quad (2.129)$$

Para o modo TM, tem-se que:

$$E_z = [A.J_n(k_c.r) + B.N_n(k_c.r)] \cos(n.\phi) \quad (2.130)$$

Para satisfazer as condições de contorno para o modo TM tem-se que $E_z = 0$ em $r = a$ e $r = b$. Portanto:

$$\begin{aligned} A.J_n(k_c.a) + B.N_n(k_c.a) &= 0 \\ A.J_n(k_c.b) + B.N_n(k_c.b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.131)$$

Para solução não trivial, tem-se que:

$$\frac{J_n(k_c \cdot a)}{J_n(k_c \cdot a)} = \frac{N_n(k_c \cdot a)}{N_n(k_c \cdot a)} \quad (2.132)$$

Para os modos TE, $\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$, portanto:

$$\begin{aligned} A \cdot J_n'(k_c \cdot a) + B \cdot N_n'(k_c \cdot a) &= 0 \\ A \cdot J_n'(k_c \cdot b) + B \cdot N_n'(k_c \cdot b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.133)$$

Para a solução não trivial:

$$\frac{J_n'(k_c \cdot a)}{J_n'(k_c \cdot a)} = \frac{N_n'(k_c \cdot a)}{N_n'(k_c \cdot a)} \quad (2.134)$$

2.6.4 Traçados de campos em guias de ondas circulares.

Similarmente aos guias de ondas retangulares, os traçados dos campos dos modos em guias de ondas circulares podem ser obtidos à partir de 4 modos fundamentais: TE₀₁, TM₀₁, TE₁₁ e TM₁₁.

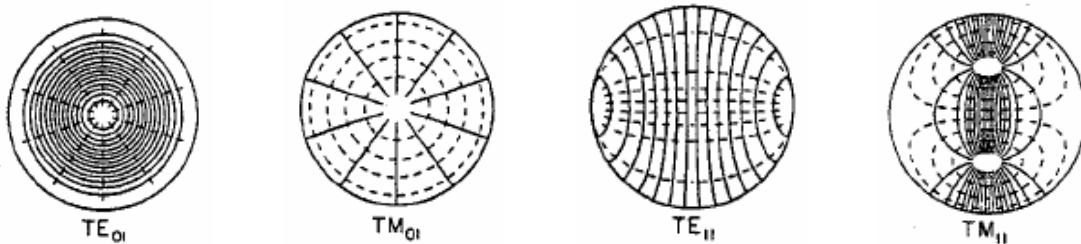


Figura 21 – Modos fundamentais utilizados para o traçado das linhas de força em guias retangulares

(——— - Campo elétrico; - - - - - Campo magnético)

Os modos TE_{0,ℓ} e TM_{0,ℓ} podem ser considerados como ℓ configurações TE_{0,1} ou TM₀₁ na direção radial.

Abaixo tem-se o modo TE₀₂ que pode ser representado por duas configurações do modo TE₀₁ na direção radial.

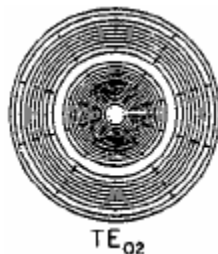


Figura 22 – Representação do modo TE₀₂

Em seguida, tem-se o modo TM_{03} , que pode ser representado por três configurações do modo TM_{01} na radial.

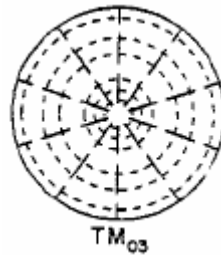


Figura 23 – Representação do modo TM_{03}

Os modos $TE_{n\ell}$ e $TM_{n\ell}$ podem ser considerados como $n \times \ell$ configurações TE_{11} e TM_{11} respectivamente, os números n e ℓ indicam o número de células nas direções ϕ e r .

Abaixo tem-se o modo TE_{42} , que indica 4 configurações na direção ϕ e duas na direção r do modo TE_{11} :

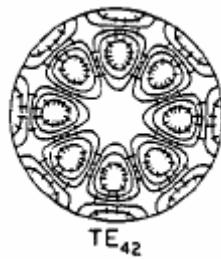


Figura 24 – Representação do modo TE_{42}

Em seguida tem-se o modo TM_{32} , que pode ser representado por 3 configurações na direção ϕ e 2 radiais do modo TM_{11} :



Figura 25 – Representação do modo TM_{32}

2.6.5 Filtros de modos em guias de ondas

Quando vários modos se propagam em guias de ondas, a eficiência de transmissão é reduzida, pois a potência se distribui em modos indesejáveis. Para evitar estes modos podem ser utilizados supressores ou filtros de modos.



Figura 26 - Supressor de modos com campos elétricos em guias radiais, constituído por fios metálicos dispostos numa seção transversal do guia



Figura 27 – Supressor de modos $TE_{m,n}(n \neq 0)$ e modos $TM_{m,n}(n \neq 0)$, constituído por fios metálicos dispostos numa seção transversal do guia)

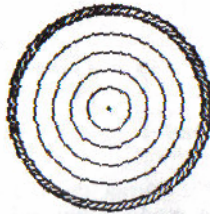


Figura 28 – supressor de modos $TM_{n,\ell}$ em guias circulares, constituído por fios metálicos circulares concêntricos dispostos numa seção transversal do guia.