

Introdução ao Controle Ótimo:

- **Otimização de funções e funcionais.**
- **Otimização paramétrica.**
- **Problema de controle ótimo com tempo final fixo.**

Controle Ótimo Linear-Quadrático:

- **Problemas de regulação (Projeto de Regulador)**
- **Problemas de rastreamento (Projeto de Servossistema)**

Otimização

Determinação de uma “ação” que proporciona um máximo de “benefício”, medido por um critério pré-estabelecido.

Otimização paramétrica

A ação é a escolha de um vetor de parâmetros de dimensão fixa e o critério de desempenho é uma função escalar do vetor de parâmetros que dever ser minimizada (maximizada).

Controle Ótimo

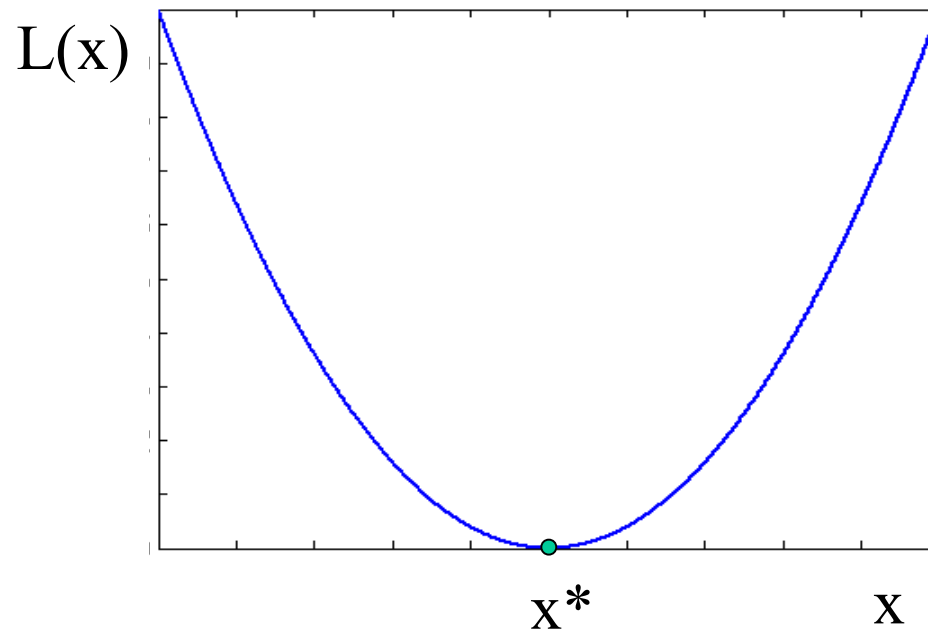
Obtenção de uma “lei de controle” (controlador ótimo) para minimizar (maximizar) um funcional.

Motivação

- Métodos de projeto baseados na teoria de Controle Ótimo permitem levar em conta o **esforço de controle** a ser empregado.
- Cabe ao projetista conferir pesos aos diferentes canais de erro e de controle, tendo em vista o compromisso entre melhorar o desempenho do controlador e reduzir o esforço de controle.
- Tal procedimento de projeto pode ser **mais intuitivo** que a escolha direta para as posições dos pólos de malha fechada.
- O uso de técnicas de Controle Ótimo permite obter boas **margens de ganho e de fase**.

Funções de uma variável

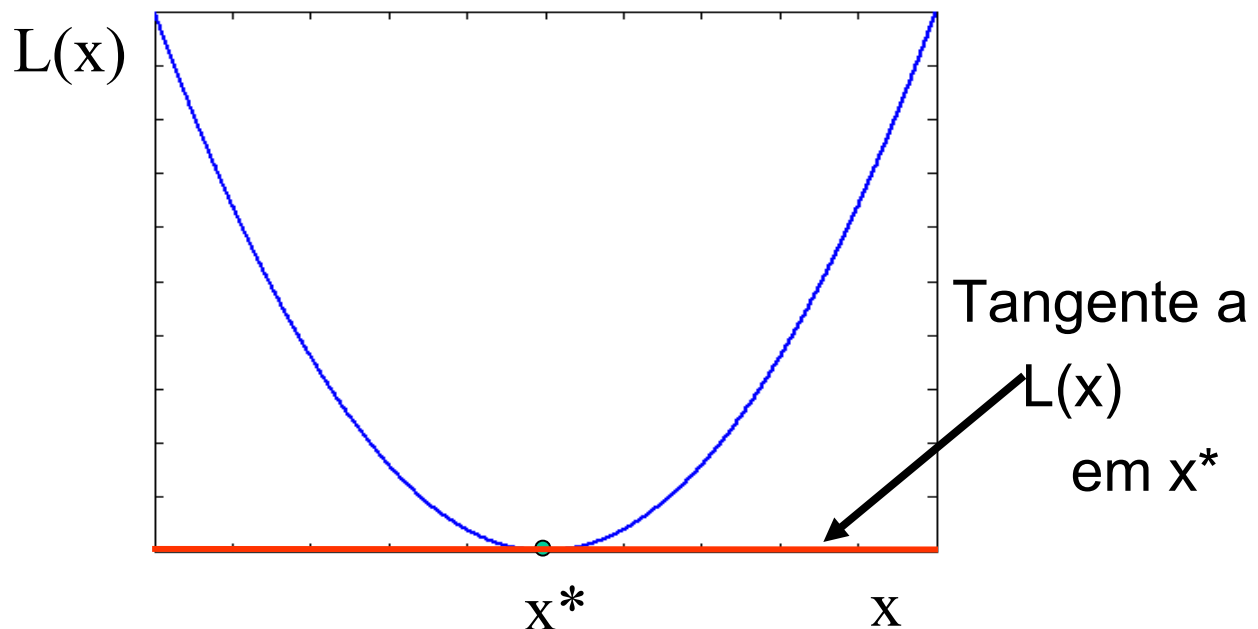
- Seja $L(x)$ uma função de uma variável $x \in \mathbb{R}$ (“função de custo”)
- Problema: **Encontrar o valor x^* que minimiza $L(x)$.**



Funções de uma variável

- Se $L(x)$ for “suave” (1ª e 2ª derivadas contínuas), deve-se ter:

$$\left. \frac{dL(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 0 \quad \left. \frac{d^2L(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0$$



Funções de várias variáveis

- Seja $L(\mathbf{x})$ uma função de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Funções de várias variáveis

Vetor gradiente ($m \times 1$):

$$\mathbf{L}_x = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{L} / \partial x_1 \\ \partial \mathbf{L} / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial \mathbf{L} / \partial x_m \end{bmatrix}$$

Funções de várias variáveis

Matriz hessiana ($m \times m$, simétrica) :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{xx}} = \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_1^2 & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_1 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_1 \partial x_m \\ \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_2^2 & \cdots & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_2 \partial x_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_m \partial x_1 & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_m \partial x_2 & \cdots & \partial^2 \mathbf{L} / \partial x_m^2 \end{bmatrix}$$

Funções de várias variáveis

- Expansão em série de Taylor da função L em torno de um ponto \mathbf{x} :

$$L(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + (\mathbf{L}_{\mathbf{x}})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{L}_{\mathbf{xx}} \Delta \mathbf{x} + O(3)$$

Funções de várias variáveis

- **Expansão em série de Taylor da função L em torno de um ponto \mathbf{x} :**

$$L(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + (\mathbf{L}_{\mathbf{x}})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{L}_{\mathbf{xx}} \Delta \mathbf{x} + O(3)$$

- **Incremento em L causado por um incremento em \mathbf{x} :**

$$\Delta L(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) = L(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - L(\mathbf{x})$$

$$\Delta L(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) = (\mathbf{L}_{\mathbf{x}})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{L}_{\mathbf{xx}} \Delta \mathbf{x} + O(3)$$

Funções de várias variáveis

$$\Delta L(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}) = L(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - L(\mathbf{x})$$

- \mathbf{x}^* é um ponto de mínimo local se

$$\Delta L(\mathbf{x}^*, \Delta \mathbf{x}) \geq 0$$

para pequenos incrementos $\Delta \mathbf{x}$.

Funções de várias variáveis

$$\Delta L(\mathbf{x}^*, \Delta \mathbf{x}) \geq 0$$

$$\Delta L(\mathbf{x}^*, \Delta \mathbf{x}) = (\mathbf{L}_x)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{L}_{xx}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} + O(3)$$

- No ponto de mínimo \mathbf{x}^* deve-se ter $\mathbf{L}_x = 0$
- Que condição deve ser satisfeita por \mathbf{L}_{xx} ?

Def: Matrizes Positivo-Definidas, Negativo-Definidas e Semidefinidas

Uma matriz simétrica M é dita

- **Positivo-Definida** ($M > 0$) se $x^T M x > 0$, $\forall x \neq 0$.
- **Positivo-Semidefinida** ($M \geq 0$) se $x^T M x \geq 0$, $\forall x$.
- **Negativo-Definida** ($M < 0$) se $x^T M x < 0$, $\forall x \neq 0$.
- **Negativo-Semidefinida** ($M \leq 0$) se $x^T M x \leq 0$, $\forall x$.
- **Indefinida** nos demais casos.

Def: Matrizes Positivo-Definidas, Negativo-Definidas e Semidefinidas

Condições equivalentes para os autovalores da matriz:

- $M > 0 \Leftrightarrow$ todos $\lambda_i(M) > 0$
- $M \geq 0 \Leftrightarrow$ todos $\lambda_i(M) \geq 0$
- $M < 0 \Leftrightarrow$ todos $\lambda_i(M) < 0$
- $M \leq 0 \Leftrightarrow$ todos $\lambda_i(M) \leq 0$

Funções de várias variáveis

$$\Delta L(\mathbf{x}^*, \Delta \mathbf{x}) = \cancel{(\mathbf{L}_x)^T}_{x=\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{L}_{xx}|_{x=\mathbf{x}^*} \Delta \mathbf{x} + O(3)$$

- **Condição sobre o gradiente: $\mathbf{L}_x = 0$**
- **Análise da Hessiana:**
 - $\mathbf{L}_{xx} > 0$: Mínimo local**
 - $\mathbf{L}_{xx} < 0$: Máximo Local**
 - \mathbf{L}_{xx} Indefinida: Ponto de Sela**
 - \mathbf{L}_{xx} Semidefinida: Nada se pode concluir
(Examinar termos de terceira ordem)**

Alguns gradientes úteis

- Dados dois vetores-coluna \mathbf{x} , \mathbf{y} tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

- Dada uma matriz $\mathbf{Q}_{n \times n}$ simétrica e vetores-coluna $\mathbf{x}_{n \times 1}$, $\mathbf{y}_{n \times 1}$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) = 2\mathbf{Q} \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2\mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Ex: Função Quadrática com $m = 2$

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} + [s_1 \quad s_2] \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \mathbf{x}$$

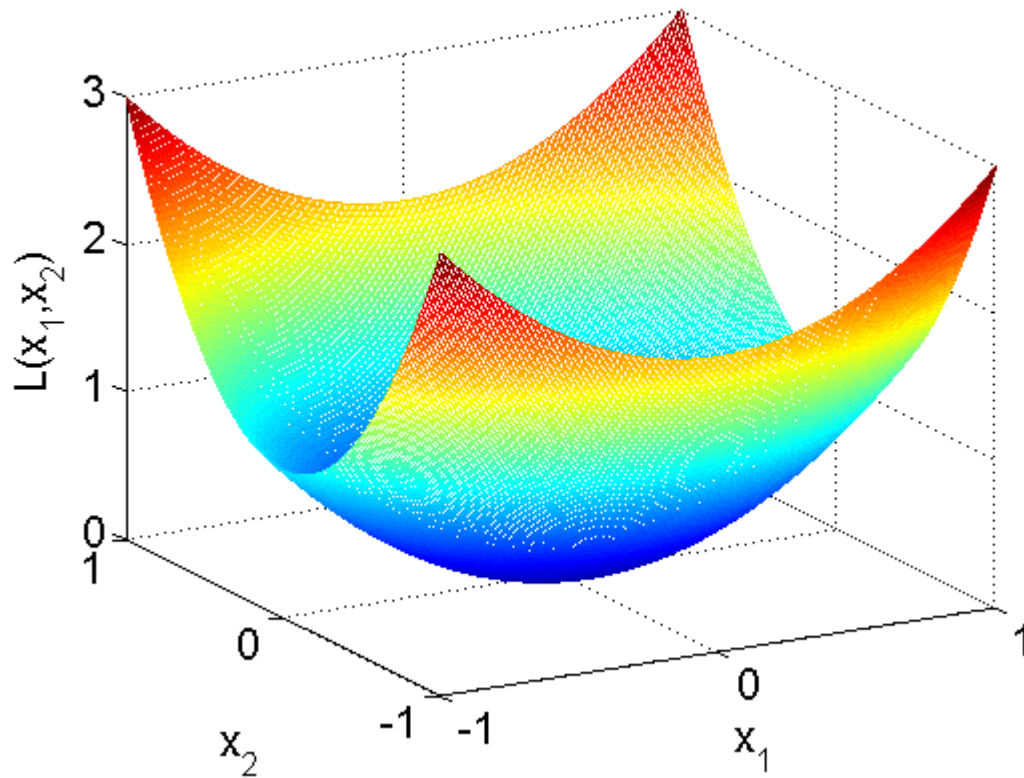
$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{s}$$

$$L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q} \mathbf{x}^* + \mathbf{s} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}$$

$$L_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}$$

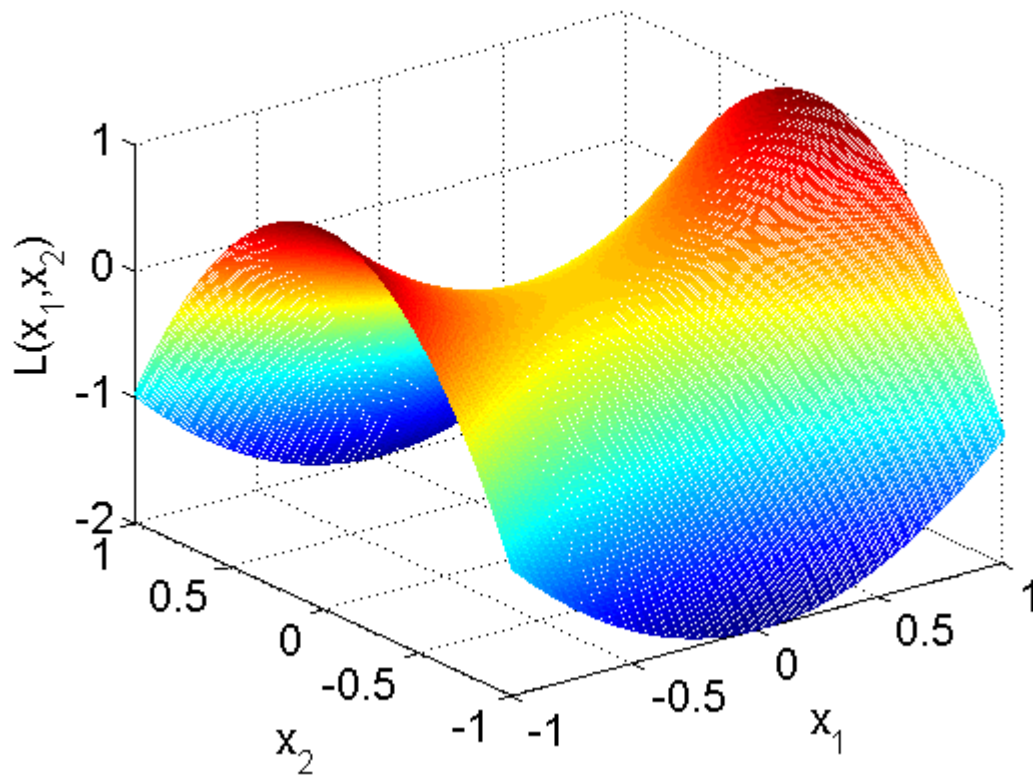
Ex: Função Quadrática com $m = 2$

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{s} \quad \mathbf{L}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q} \quad \bullet \quad \text{Ex: } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Ex: Função Quadrática com $m = 2$

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{s} \quad \mathbf{L}_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q} \quad \bullet \quad \text{Ex: } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Otimização com Restrições

- Suponha que a minimização de $L(x)$ deva ser feita de modo a satisfazer uma restrição expressa na forma $f(x) = 0$, com $f \in \mathbb{R}^n$.
- Solução: Usar multiplicadores de Lagrange.

Otimização com Restrições

- **Lagrangiano:** $L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$

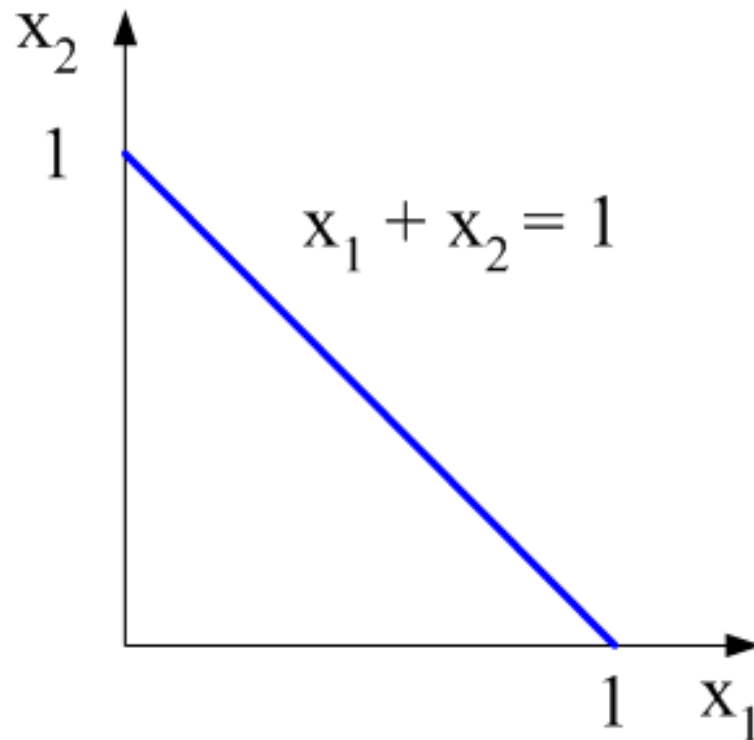
$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

- **Condições a serem satisfeitas pelo ponto de mínimo:**

$$\frac{\partial L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$$

Otimização com Restrições: Exemplo

Encontrar o ponto (x_1, x_2) sob a reta $x_1 + x_2 = 1$ que esteja mais próximo da origem.



Otimização com Restrições: Exemplo

Encontrar o ponto (x_1, x_2) sob a reta $x_1 + x_2 = 1$ que esteja mais próximo da origem.

- Função de custo: $L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
- Restrição: $x_1 + x_2 - 1 = 0$
- Lagrangeano: $L'(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$

Otimização com Restrições: Exemplo

$$L'(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda (x_1 + x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow x_1^* = -\lambda^* / 2$$

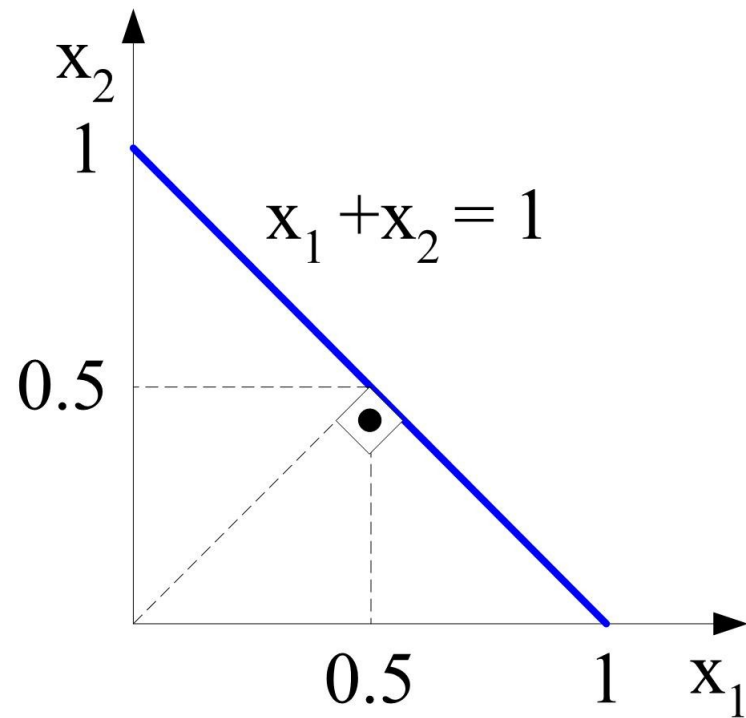
$$\frac{\partial L'}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_2^* = -\lambda^* / 2$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^* + x_2^* = 1$$

$$\Rightarrow -\lambda^* / 2 - \lambda^* / 2 = 1 \Rightarrow \lambda^* = -1$$

- **Logo:** $x_1^* = x_2^* = 1/2$

Otimização com Restrições: Exemplo



Otimização com Restrições: Exemplo

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1^* = 0.5 \\ x_2^* = 0.5 \end{cases}$$

- E se x_1^2 , x_2^2 tivessem pesos diferentes na função de custo ?

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2) &= \alpha x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 + x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Otimização com Restrições: Exemplo

$$L'(x_1, x_2, \lambda) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + \lambda (x_1 + x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x_1} = 2\alpha x_1 + \lambda = 0 \Rightarrow x_1^* = -\lambda^* / (2\alpha)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_2^* = -\lambda^* / 2$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^* + x_2^* = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda^*}{2\alpha} - \frac{\lambda^*}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha + 1}{2\alpha} \lambda^* = -1 \Rightarrow \lambda^* = -\frac{2\alpha}{\alpha + 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{\alpha + 1} \\ x_2^* = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \end{cases}$$

Otimização com Restrições: Exemplo

$$L(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

$$x_1^* = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad x_2^* = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

Peso de $x_1 \uparrow \Rightarrow x_1^* \downarrow$ e $x_2^* \uparrow$

Otimização de funcionais: Cálculo Variacional

- **Funcional:** Regra de correspondência que atribui um valor escalar (real) a cada função $x(t)$ pertencente a uma certa classe.
- **Ex:** Suponha que $x(t)$ seja uma função contínua definida no intervalo $[t_0, t_f]$. Um exemplo de funcional seria

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} x(t) dt$$

- A classe de funções considerada pode ainda envolver restrições. Por exemplo: $x(t_0) = a$, $x(t_f) = b$.

Otimização de funcionais: Cálculo Variacional

- Uma função $x^*(t)$ é um mínimo local do funcional $J(x)$ se quaisquer incrementos $\delta x(t)$ admissíveis na função $x^*(t)$ não reduzirem o valor de J , isto é:

$$J(x^* + \delta x) \geq J(x^*), \quad \forall \delta x \text{ admissível}$$

- **Incremento admissível:**

Respeita a classe de funções consideradas

(p. ex., funções contínuas), bem como possíveis

restrições (p. ex. $x(t_0)$, $x(t_f)$ fixados $\Rightarrow \delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$).

Regra de Leibniz para funcionais

- Suponha que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ seja uma função de t e

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} h(\mathbf{x}(t), t) dt$$

sendo h uma função escalar. Então:

$$\delta J(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{h}_x^T(\mathbf{x}(t), t) \delta \mathbf{x}(t)] dt$$

$$\mathbf{h}_x = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial h / \partial x_1 \\ \partial h / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial h / \partial x_n \end{bmatrix}$$

Condição a ser satisfeita por x^*

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} [h_x^T(x^*(t), t) \delta x(t)] dt$$

$$\delta J(x^*, \delta x) \geq 0, \quad \forall \delta x \text{ admissível}$$

- **Se δx for livre em (t_0, t_f) , deve-se ter**

$$h_x(x^*(t), t) = 0, \quad \forall t \in (t_0, t_f)$$

Nem sempre é possível ou prático se chegar a uma solução analítica

- **Nesses casos podemos utilizar métodos/algoritmos de otimização para determinar um conjunto ótimo de parâmetros.**

Estrutura geral:

- *Passo 0:* (Inicialização) Arbitrar um valor inicial x_0 .
- *Passo 1:* (Teste de convergência) Verificar se o valor atual para x_k é solução ótima. Caso afirmativo $x^*=x_k$. Fim.
- *Passo 2:* (Determina uma direção de busca) Calcula um vetor não-nulo que será utilizado como direção de busca.
- *Passo 3:* (Determina o passo) Calcula um comprimento de passo a ser dado na direção de busca.
- *Passo 4:* (Atualiza a estimativa do ótimo) Determine nova estimativa adicionando a x_k o incremento determinado.
Volta para o passo 1.

Os algoritmos de otimização podem usar o gradiente (“steepest descent”, BFGS, DFP), a hessiana (Newton) ou apenas valores da função nos “pontos de busca” (busca direta, poliedros flexíveis, busca aleatória, algoritmos genéticos).

Existem estratégias específicas para “escapar” de mínimos locais (zona tabu, recozimento simulado, times assíncronos).

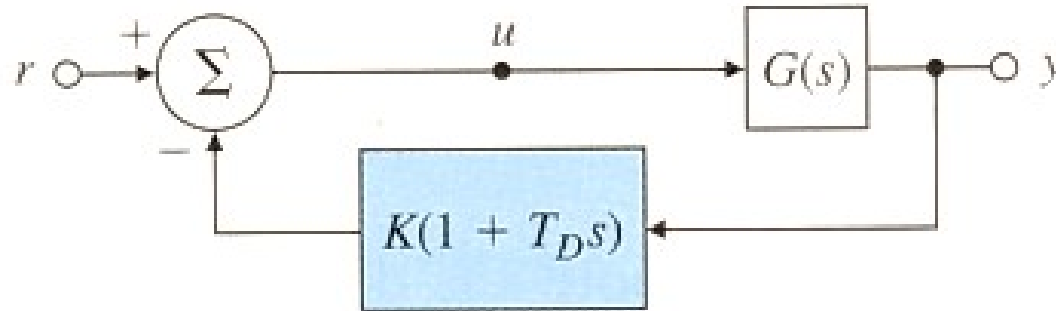
Aspectos numéricos podem ser importantes para a convergência e correto funcionamento do algoritmo.

Otimização paramétrica em controle

Otimização paramétrica:

$\min f(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é um vetor real.

É um problema muito frequente em aplicações industriais de controle:

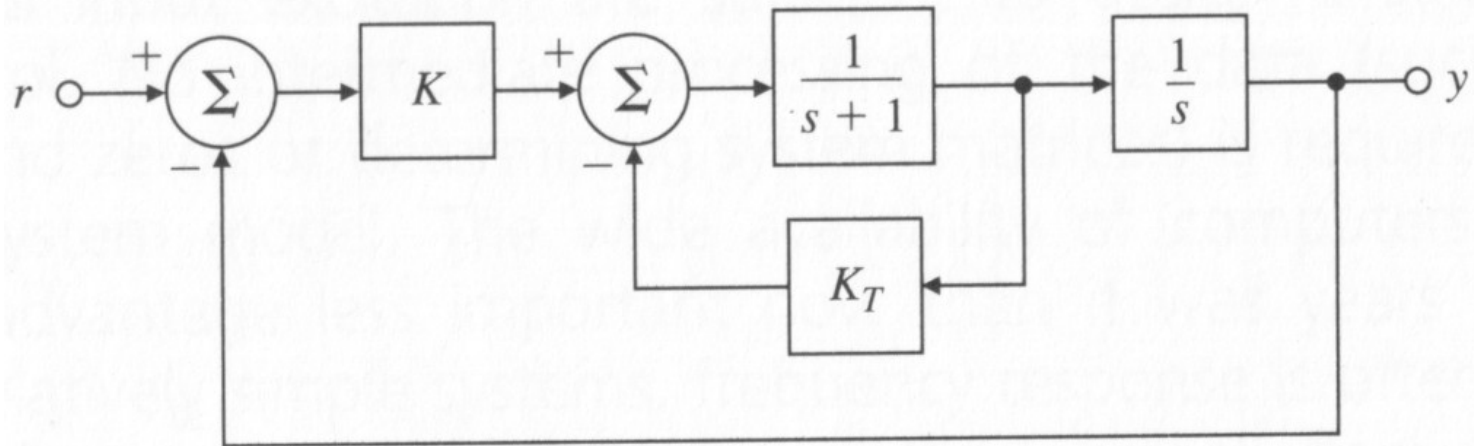


$$\min_{K, T_D} \int_0^{\infty} |y(t, K, T_D) - r(t)| dt, \text{ para } r(t) \text{ degrau unitário.}$$

Os parâmetros da otimização podem não ser os parâmetros do controlador e sim parâmetros de um método de projeto (por exemplo ξ e ω_n ou σ e ω_d , ou ainda os valores das matrizes Q e R do método LQR que será discutido a seguir) que estão relacionados com os parâmetros do controlador.

Aplicação : controle de um servomecanismo

Para o servomecanismo do diagrama de blocos, determine K e K_T de forma a minimizar o índice de desempenho dado.

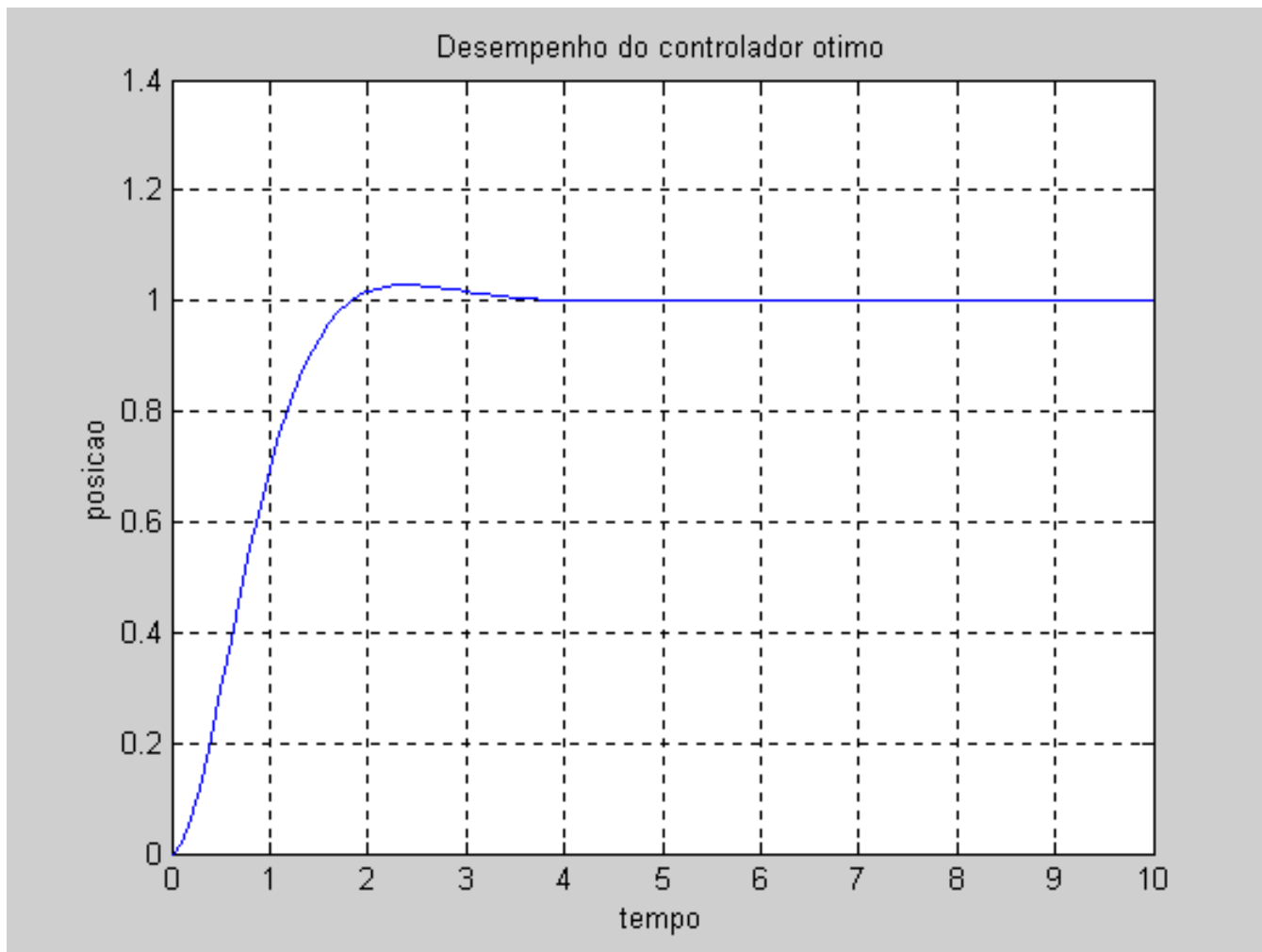


$$\text{desemp}(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) = \alpha.(\text{sobresinal}) + \beta.(\text{tempo de subida}) \\ + \gamma.(\text{norma de } [K \ K_T])$$

Solução em MATLAB:

```
function [func]=desemp(q);  
%  
% Implementacao da avaliacao de desempenho  
% Argumento q -> contém os elementos da diagonal de Q  
%  
num=[1]; den=[1 1 0]; servo=tf(num,den); sss=ss(servo);  
k=lqr(sss.A,sss.B,diag([q(1)^2,q(2)^2]),1);  
servo_mf=ss(sss.A-sss.B*k,sss.B*k(2),sss.C, sss.D);  
y=step(servo_mf,0:.1:10);  
ov=max(y)-1; % sobresinal  
[dummy,index]=max(y>0.9);  
ts=(index-1)*.1; % tempo de subida  
func=abs(ov)+ts*5+norm(k); % indice de desempenho  
  
x=fminsearch('desemp',[10 10])
```

Desempenho do controlador ótimo



Problema de Controle Ótimo com Tempo Final Fixo

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

- Suponha que a dinâmica da planta seja descrita por

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$x(t_0) \text{ fixado}$$

- Consideraremos o problema de minimizar funcionais de custo da forma

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt$$

- Vale ressaltar que as funções x e u estão relacionadas pela **equação de estado**, que corresponde a uma **restrição dinâmica** para o problema.

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

- **Idéia: Agregar a restrição dinâmica ao funcional de custo utilizando multiplicadores de Lagrange:**

$$J'(x, u, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} [L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt$$

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

$$J'(x, u, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} [L(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt$$

- **Usando a seguinte definição (Hamiltoniano):**

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t)$$

pode-se escrever o novo custo como:

$$J'(x, u, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}] dt$$

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

$$J'(x, u, \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}] dt$$

- **Empregando a regra de Leibniz:**

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u + H_\lambda^T d\lambda - \lambda^T \delta \dot{x} - \dot{x}^T \delta \lambda] dt$$

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T d\lambda - \lambda^T \delta \dot{x}] dt$$

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T d\lambda - \lambda^T \delta \dot{x}] dt$$

• **Integrando por partes:** $\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \delta \dot{x} dt = \lambda^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt$

$$= \lambda^T(t_f) \delta x(t_f) - \lambda^T(t_0) \delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt$$

$$= \lambda^T(t_f) \delta x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x dt$$

$x(t_0)$ é fixado

$$\delta J = -\lambda^T(t_f) \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [(H_x + \dot{\lambda})^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T d\lambda] dt$$

Problema de Controle Ótimo com Tempo Final fixo

$$\delta J = -\lambda^T(t_f)\delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{H}_x + \dot{\lambda})^T \delta \mathbf{x} + H_u^T \delta u + (\mathbf{H}_\lambda - \dot{\mathbf{x}})^T d\lambda] dt$$

- Anulando os coeficientes dos incrementos em u , x , $x(t_f)$, λ :

$$H_u = 0$$

$$\dot{\lambda} = -\mathbf{H}_x \quad \lambda(t_f) = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_\lambda \quad \mathbf{x}(t_0) \text{ dado}$$

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

- Seja $\theta(t)$ a temperatura no interior de um quarto e $m(t)$ a taxa de calor fornecida por um aquecedor.
- Suponha que a dinâmica térmica do sistema, linearizada em torno da temperatura desejada, seja descrita por

$$\Delta \dot{\theta} = -0.1\Delta \theta + 2\Delta m$$

em que $\Delta \theta(t) = \theta(t) - \bar{\theta}$, $\Delta m(t) = m(t) - \bar{m}$

- **Objetivo:** Manter a temperatura no valor desejado, isto é, $\Delta\theta(t) = 0$, com excursões pequenas do sinal de controle $\Delta m(t)$.

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$\Delta \dot{\theta} = -0.1\Delta \theta + 2\Delta m$$

- Usando a notação $x = \Delta\theta$ e $u = \Delta m$:

$$\dot{x} = -0.1x + 2u$$

- Funcional de custo adotado:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^2(t) + r u^2(t)] dt$$

em que $r > 0$ é um parâmetro a ser ajustado pelo projetista.

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$\dot{x} = \underbrace{-0.1x + 2u}_{f(x,u,t)} \quad J(x, u) = \int_0^{t_f} \underbrace{\frac{1}{2} [x^2(t) + r u^2(t)]}_{L(x(t), u(t), t)} dt$$

- **Hamiltoniano:**

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t) = \frac{x^2 + r u^2}{2} + \lambda (-0.1x + 2u)$$

- **Condições de otimalidade:**

$$H_u = 0 \Rightarrow ru + 2\lambda = 0 \Rightarrow u(t) = -\frac{2\lambda(t)}{r}$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = -x + 0.1\lambda \quad \lambda(t_f) = 0$$

$$\dot{x} = H_\lambda = -0.1x + 2u \quad x(t_0) \text{ dado}$$

Diferença inicial com respeito à temperatura desejada

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

- Condições de otimalidade:

$$u(t) = - \frac{2\lambda(t)}{r}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -x(t) + 0.1\lambda(t) \quad \lambda(t_f) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -0.1x(t) + 2u(t) \quad x(t_0) \text{ dado}$$

- Dificuldade: Acoplamento entre as equações.

u(t) → Requer **λ(t)** → Requer **x(t)** → Requer **u(t)**

Exemplo: Sistema de regulação de temperatura

- Idéia – Supor uma determinada forma para a solução:

$$\lambda(t) = p(t)x(t)$$

$$u(t) = -\frac{2\lambda(t)}{r} = -\frac{2p(t)x(t)}{r}$$

$$\dot{x}(t) = -0.1x(t) + 2u(t) = -0.1x(t) - \frac{4p(t)x(t)}{r}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -x(t) + 0.1\lambda(t)$$

$$\dot{p}(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t) = -x(t) + 0.1p(t)x(t)$$

$$\dot{p}(t)x(t) + p(t)\left[-0.1x(t) - \frac{4p(t)x(t)}{r}\right] = -x(t) + 0.1p(t)x(t)$$

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$\dot{p}(t)x(t) + p(t) \left[-0.1x(t) - \frac{4p(t)x(t)}{r} \right] = -x(t) + 0.1p(t)x(t)$$

$$\dot{p}(t)x(t) - 0.1p(t)x(t) - \frac{4p^2(t)x(t)}{r} = -x(t) + 0.1p(t)x(t)$$

$$\dot{p}(t)x(t) = \left[0.2p(t) + \frac{4p^2(t)}{r} - 1 \right] x(t)$$

- Como essa identidade vale para todo $x(t)$, deve-se ter:

$$\dot{p}(t) = 0.2p(t) + \frac{4p^2(t)}{r} - 1 \quad \text{(Equação de Riccati)}$$

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$\dot{p}(t) = 0.2p(t) + \frac{4p^2(t)}{r} - 1$$

- **Condição final:**

$$\begin{array}{l} \lambda(t) = p(t)x(t) \\ \lambda(t_f) = 0 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \lambda(t_f) = p(t_f)x(t_f) = 0, \forall x(t_f)$$

\downarrow

$$p(t_f) = 0$$

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$u(t) = -\frac{2\lambda(t)}{r} \quad u(t) = -\frac{2p(t)}{\underbrace{r}_{k(t)}}x(t)$$
$$\lambda(t) = p(t)x(t)$$

- A solução consiste em uma realimentação de estado com ganho variante no tempo.

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

$$\dot{p}(t) = 0.2p(t) + \frac{4p^2(t)}{r} - 1 \quad p(t_f) = 0$$

$$k(t) = \frac{2p(t)}{r}$$

$$u(t) = -k(t)x(t)$$

Exemplo:

Sistema de regulação de temperatura

- Solução da Equação de Riccati:

a) Solução analítica:

$$\frac{dp}{dt} = 0.2p + \frac{4p^2}{r} - 1 \Rightarrow \int \frac{dp}{4r^{-1}p^2 + 0.2p - 1} = \int dt$$

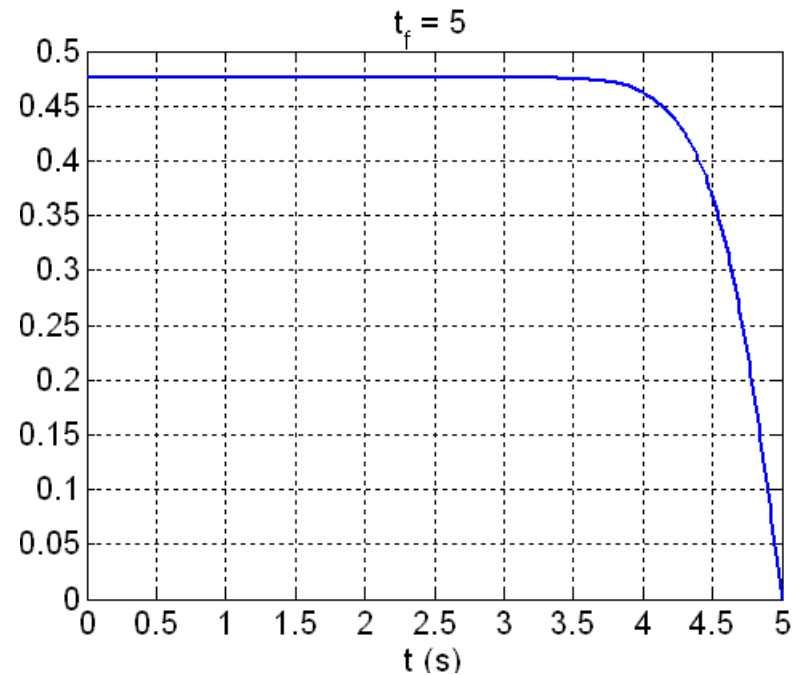
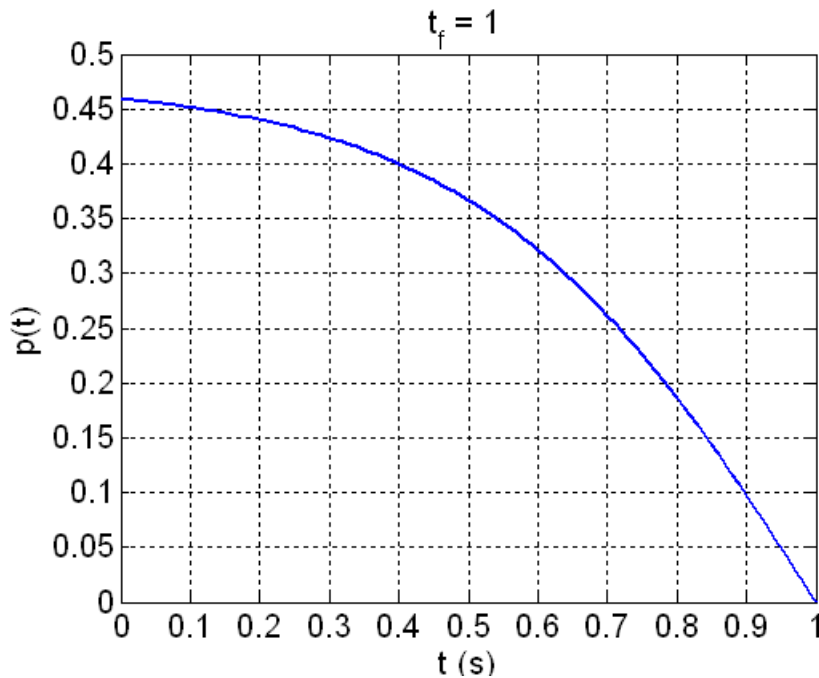
Expansão em frações parciais

Usa-se $p(t_f) = 0$ para obter a constante de integração

b) Método numérico:

Exemplo: Função ODE45 do Matlab.

Exemplo: Solução da Equação de Riccati para $r = 1$



Se o horizonte de tempo t_f for grande, o valor de $p(t)$ nos instantes iniciais é aproximadamente constante.

Exemplo: Horizonte Infinito

- Se $t_f \rightarrow \infty$, pode-se usar o valor estacionário para $p(t)$.
- Impondo-se $p(t) = p = \text{constante}$:

$$\cancel{\dot{p}(t)} = 0.2p(t) + \frac{4p^2(t)}{r} - 1$$

$$\frac{4p^2}{r} + 0.2p - 1 = 0$$

- Para $r = 1$, por exemplo:

$$4p^2 + 0.2p - 1 = 0 \begin{cases} p = 0.48 \Rightarrow k = 2p/r = 0.96 \\ p = -0.53 \Rightarrow k = 2p/r = \cancel{-1.06} \end{cases}$$

Exemplo: Horizonte Infinito

- **Conclusão: Se o problema for formulado com horizonte infinito, a solução corresponde a uma realimentação de estado com ganho constante.**

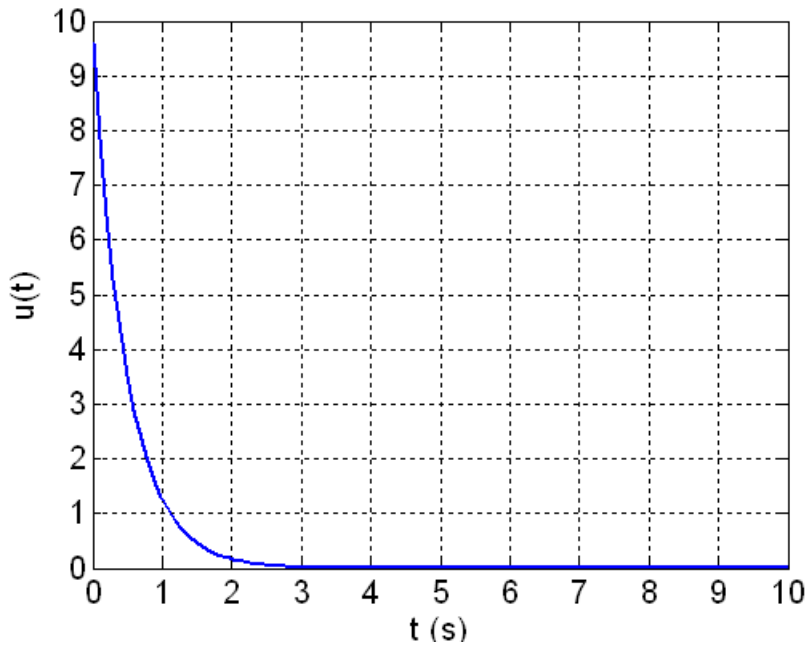
Exemplo:

Efeito do peso do controle r

$$r = 1$$

$$p = 0.48$$

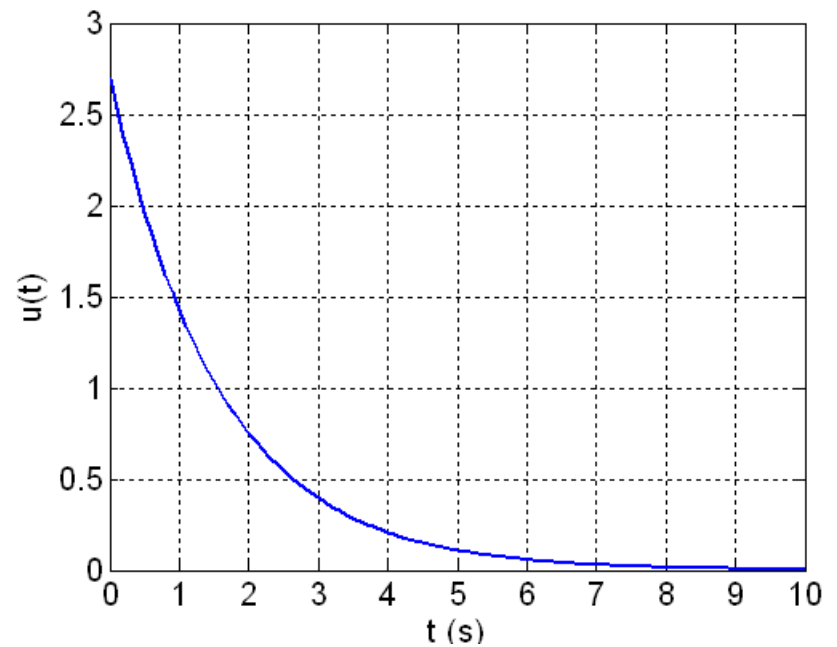
$$k = 0.96$$



$$r = 10$$

$$p = 1.35$$

$$k = 0.27$$



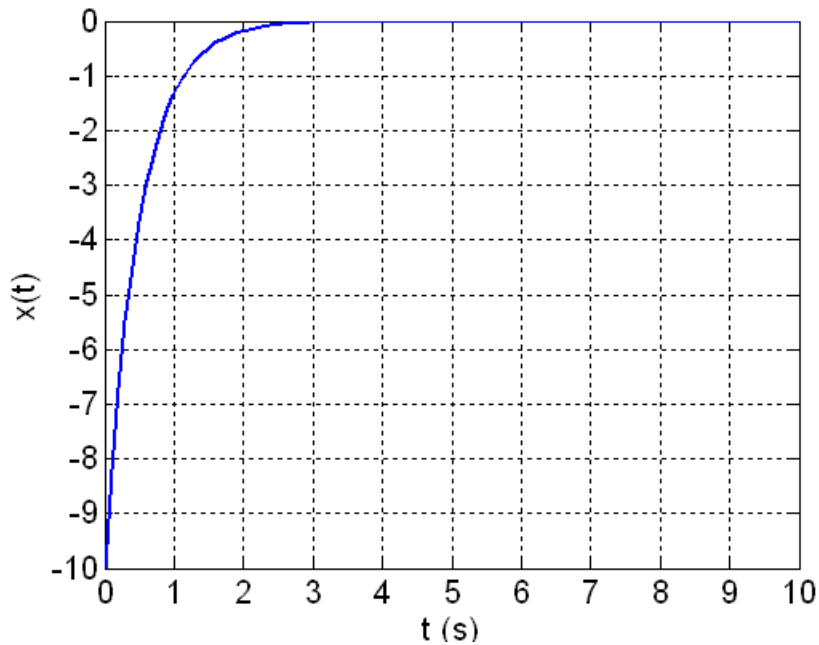
Exemplo:

Efeito do peso do controle r

$$r = 1$$

$$p = 0.48$$

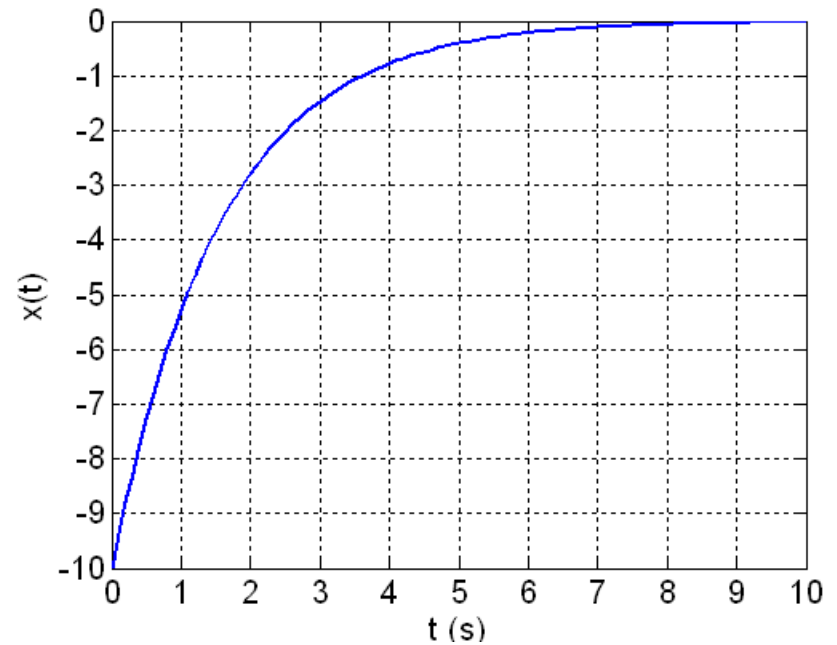
$$k = 0.96$$



$$r = 10$$

$$p = 1.35$$

$$k = 0.27$$



Regulador Linear-Quadrático

Regulador Linear-Quadrático (LQR)

- **Regulação:** Levar o estado $x(t)$ para zero.
- **Gostaríamos que o controle $u(t)$ fosse pequeno, a fim de reduzir o gasto de energia, o desgaste dos atuadores e evitar problemas de saturação.**
- **Idéia – Calcular $u(t)$, $t \geq 0$, de modo a minimizar o seguinte funcional de custo:**

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_1 x_1^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t) + r_1 u_1^2(t) + \cdots + r_p u_p^2(t)] dt$$

$$q_i \geq 0, \quad r_j > 0$$

Regulador Linear-Quadrático (LQR)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_1 x_1^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t) + r_1 u_1^2(t) + \cdots + r_p u_p^2(t)] dt$$

- “Regra de Bryson” para seleção dos pesos:

$$q_i = \frac{1}{(\text{Amplitude aceitável para } x_i)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$r_j = \frac{1}{(\text{Amplitude aceitável para } u_j)^2}, \quad j = 1, \dots, p$$

LQR: Formulação Matricial

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_1 x_1^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t) + r_1 u_1^2(t) + \cdots + r_p u_p^2(t)] dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \right\} dt
 \end{aligned}$$

LQR: Formulação Matricial

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_p \end{bmatrix}$$

Observação sobre as matrizes de pesos

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

- As matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} não precisam necessariamente ser diagonais, mas devem satisfazer as seguintes propriedades:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$$

\mathbf{Q} positivo-semidefinida

$$\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq 0$$

\mathbf{R} positivo-definida

Regulador **Linear-Quadrático**

- Problema: Minimizar o seguinte funcional **quadrático**:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

$$\mathbf{Q} \geq 0, \quad \mathbf{R} > 0$$

sendo $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ relacionados por um modelo **linear** da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(t_0) \text{ dado}$$

Regulador Linear-Quadrático

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)]}_{L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)} dt$$

- **Hamiltoniano:** $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$
 $= \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})$
- **Condições de otimalidade:**

$$H_{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}} = -(\mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}) \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \mathbf{x}(t_0) \text{ dado}$$

Regulador Linear-Quadrático

- Condições de otimalidade:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{0} \quad (\text{Equação de co-estado})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) \text{ dado} \quad (\text{Equação de estado})$$

- Dificuldade: Acoplamento entre as equações.

$\mathbf{u}(t)$ → Requer $\boldsymbol{\lambda}(t)$ → Requer $\mathbf{x}(t)$ → Requer $\mathbf{u}(t)$

Regulador Linear-Quadrático

- Admite-se a seguinte forma para a solução:

$$\lambda_{n \times 1}(t) = P_{n \times n}(t)x_{n \times 1}(t)$$

$$u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T P(t)x(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Qx(t) - A^T\lambda(t)$$

$$\dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) = -Qx(t) - A^T P(t)x(t)$$

$$\dot{P}(t)x(t) + P(t)[Ax(t) - BR^{-1}B^T P(t)x(t)] = -Qx(t) - A^T P(t)x(t)$$

Regulador Linear-Quadrático

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)] = -\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$[-\dot{\mathbf{P}}(t) - \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}]\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

- **Como essa identidade vale para todo $\mathbf{x}(t)$, deve-se ter:**

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}$$

(Equação de Riccati matricial)


Regulador Linear-Quadrático

$$- \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}$$

- **Condição final:**

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad \rightarrow \quad \lambda(t_f) = \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x}(t_f)$$

$$\lambda(t_f) = \mathbf{0} \quad \rightarrow$$


$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}$$

Regulador Linear-Quadrático

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)}_{\mathbf{K}(t)}\mathbf{x}(t)$$

- A solução consiste em uma realimentação de estado com ganho variante no tempo.

Regulador Linear-Quadrático: Resumo

$$- \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q} \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t)$$

Regulador Linear-Quadrático Horizonte Infinito

- Caso seja usado um horizonte infinito no funcional de custo, isto é:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

pode-se usar a solução assintótica da equação de Riccati: $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P} = \text{constante}$.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{Equação Algébrica de Riccati})$$


$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (\mathbf{P} \text{ Positivo-Definida})$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (\text{Realimentação com ganho constante})$$

Regulador Linear-Quadrático Horizonte Infinito

A solução para a equação algébrica de Riccati sempre existirá se:

- $R > 0$ (Positiva-Definida)
- (A, B) for controlável, ou ao menos **estabilizável**



Modos não
controláveis
são estáveis

Resolvendo o problema de controle ótimo linear-quadrático no Matlab: Função **lqr**

$$[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

- $A, B \rightarrow$ Matrizes da equação de estado do sistema
- $Q \rightarrow$ Pesos dos estados
- $R \rightarrow$ Pesos dos controles

Exemplo: Movimento Longitudinal de uma Aeronave (modo rápido)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.0 & 170 \\ -0.25 & -15 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -27 \\ -45 \end{bmatrix}$$

- x_1 = velocidade vertical
- x_2 = velocidade de arfagem
- u = ângulo de deflexão do profundor (rad)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 1$$

```
>> A = [-2 170; -0.25 -15]
```

```
>> B = [-27; -45]
```

```
>> Q = diag([1, 1])
```

```
>> R = 1
```

```
>> K = lqr(A, B, Q, R)
```

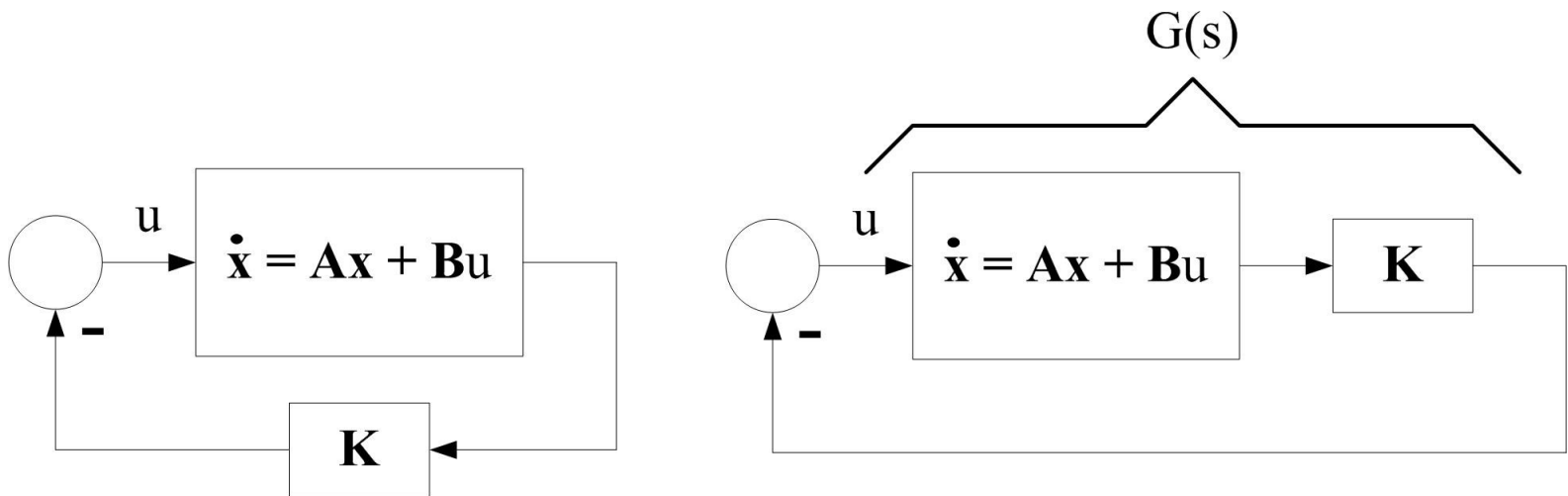
Casos a serem comparados:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1 \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 10$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, R = 10$$

**Margens de estabilidade
obtidas com o LQR**

Margens de estabilidade obtidas com o LQR



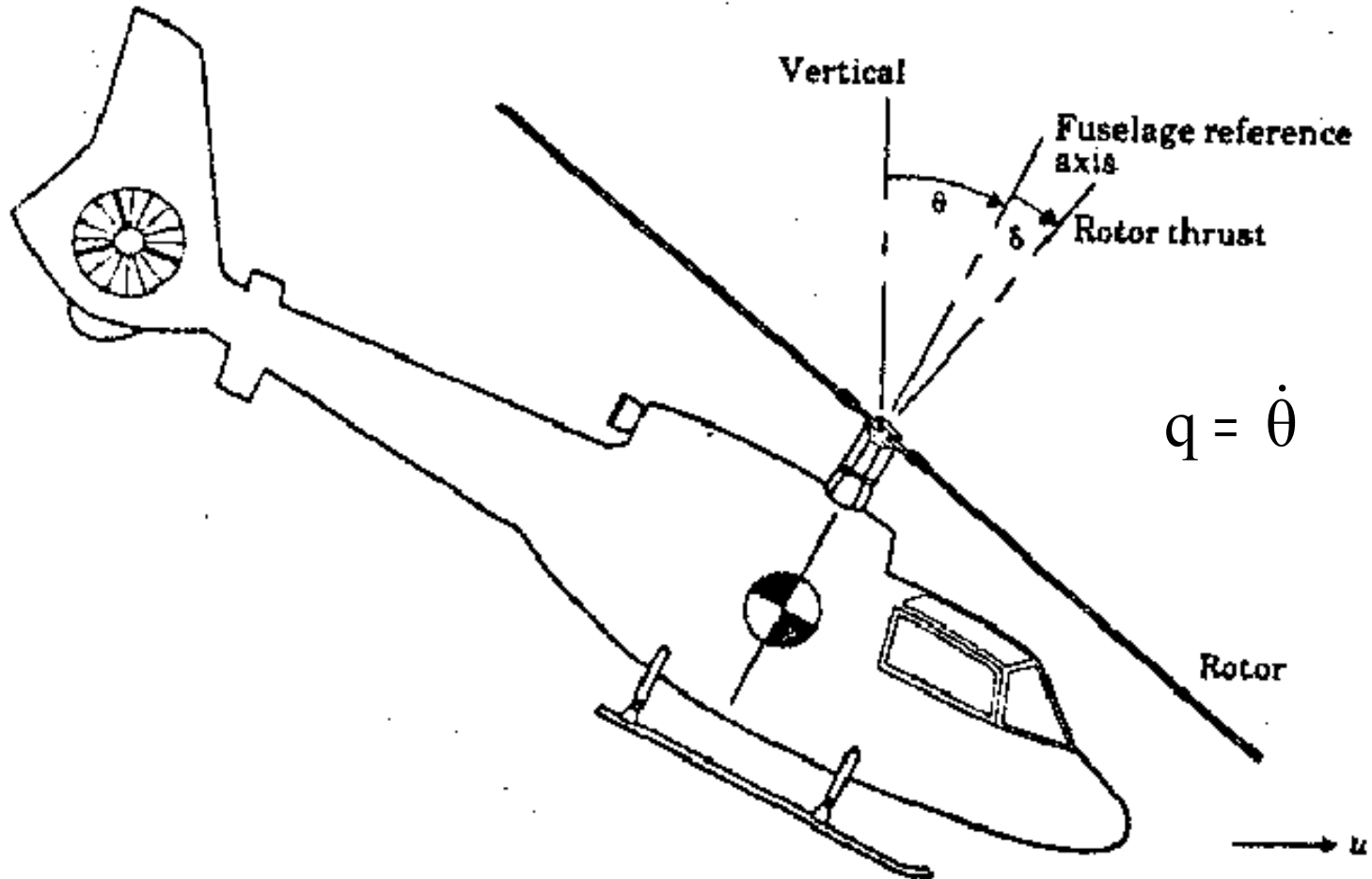
$$G(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Margens de estabilidade obtidas com o LQR

Pode-se mostrar que a realimentação de estado projetada com o LQR de horizonte infinito garante:

- Margem de fase $PM \geq 60^\circ$**
- Margem de ganho superior infinita**
- Margem de ganho inferior de pelo menos 0.5**
(Se a planta for instável em malha aberta, o ganho pode ser reduzido até a metade e a estabilidade ainda será garantida)

Ex: Sistema Instável em Malha Aberta



Ex: Sistema Instável em Malha Aberta

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0 & -0,01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1,4 & 9,8 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \theta \\ \Delta u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,3 \\ 0 \\ 9,8 \end{bmatrix} \Delta \delta$$

```
>> A = [-0.4 0 -0.01;1 0 0; -1.4 9.8 -0.02];
```

```
>> B = [6.3;0;9.8];
```

```
>> Q = diag([1,1,1]); R = 1;
```

```
>> K = lqr(A,B,Q,R)
```

```
>> sys = ss(A,B,K,0)
```

```
>> [Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys)
```

```
>> rlocus(sys)
```

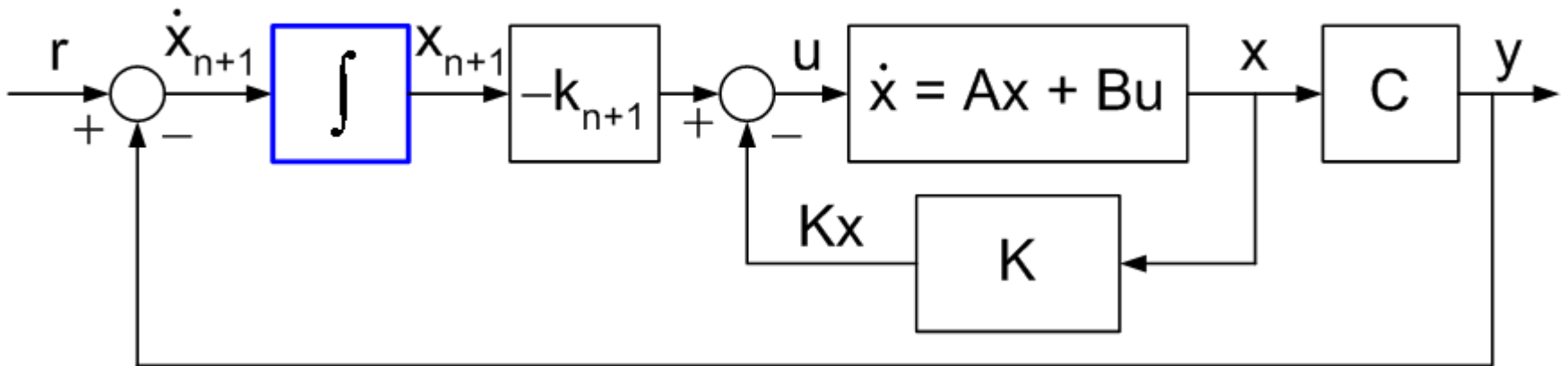
```
>> nyquist(sys)
```

Rastreamento com ação de controle integral

Rastreamento com ação de controle Integral

$$\dot{x}_{n+1} = e = r - y$$

- Usando a notação $K_i = -k_{n+1}$:



Sistemas MIMO

- Caso a planta tenha p entradas e q saídas, isto é:

$$\dot{\mathbf{x}}_{n \times 1} = \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} + \mathbf{B}_{n \times p} \mathbf{u}_{p \times 1}$$

$$\mathbf{y}_{q \times 1} = \mathbf{C}_{q \times n} \mathbf{x}_{n \times 1}$$

pode-se acrescentar um integrador a cada canal de erro:

$$\mathbf{e}_{q \times 1} = \mathbf{r}_{q \times 1} - \mathbf{y}_{q \times 1} = \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{e}$$

Sistemas MIMO

$$\mathbf{X}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{n \times 1} \\ \mathbf{X}_{e(q \times 1)} \end{bmatrix}_{(n+q) \times 1}$$

- A equação para o estado aumentado torna-se:

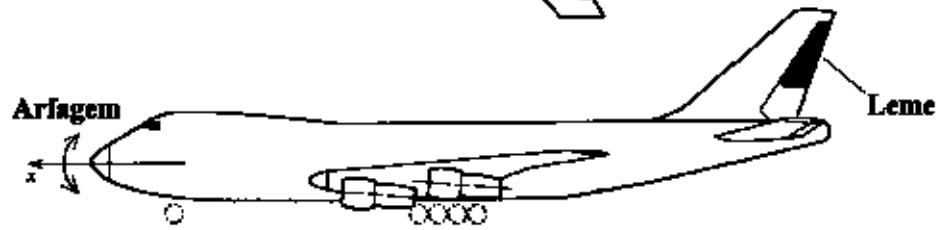
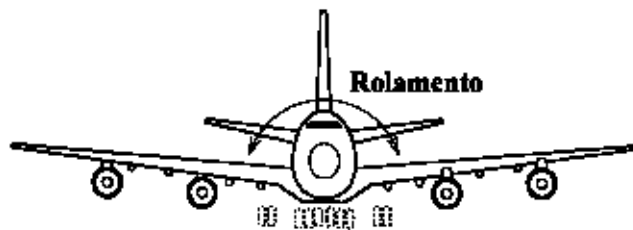
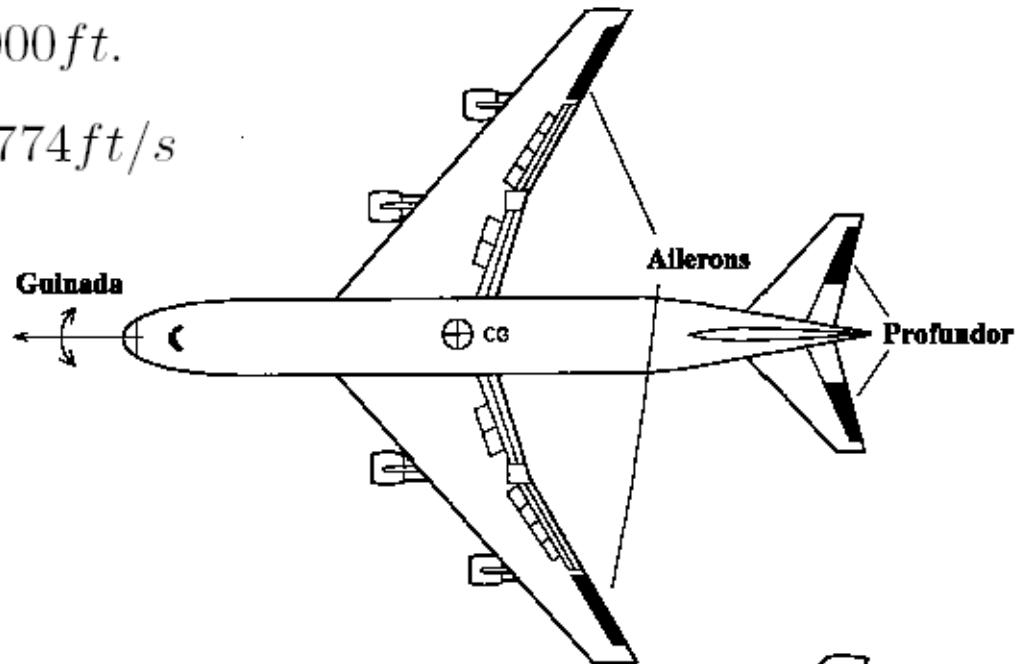
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_a &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{r} - \mathbf{Cx} \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times q} \\ -\mathbf{C}_{q \times n} & \mathbf{0}_{q \times q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n \times 1} \\ \mathbf{x}_{e(q \times 1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{n \times p} \\ \mathbf{0}_{q \times p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_a} \mathbf{u}_{p \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times q} \\ \mathbf{I}_{q \times q} \end{bmatrix} \mathbf{r}_{q \times 1} \end{aligned}$$

Ex: Controle da dinâmica longitudinal de uma aeronave Boeing 747

● Condição de vôo considerada:

● Altitude: $h = 40000\text{ft}$.

● Velocidade: $V = 774\text{ft/s}$
(Mach 0.80).



Ex: Controle da dinâmica longitudinal de uma aeronave Boeing 747

Estados:

- $x_1 = u =$ velocidade no eixo longitudinal [ft/s]
- $x_2 = w =$ velocidade no eixo vertical (positiva para baixo) [ft/s]
- $x_3 = q =$ velocidade de arfagem [$crad/s$]
- $x_4 = \theta =$ ângulo de atitude [$crad$]

Variáveis manipuladas:

- $u_1 = \delta_e =$ deflexão do profundor [$crad$]
- $u_2 = \delta_t =$ tração específica [ft/s^2]

Variáveis controladas:

- $y_1 = u = x_1$
- $y_2 = \dot{h} = -w + 7,74\theta = -x_2 + 7,74x_4$ (taxa de subida)

Modelo linearizado na condição de vôo considerada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,003 & 0,039 & 0 & -0,322 \\ -0,065 & -0,319 & 7,74 & 0 \\ 0,0201 & -0,101 & -0,429 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.01 & 1 \\ -0.18 & -0.04 \\ -1.16 & 0.598 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 7,74 \end{bmatrix} x$$

- BRYSON, A. E. *Control of Spacecraft and Aircraft*, Princeton University Press, 1994.

Modelo aumentado (p = 2, q = 2)

```
Aa = [A zeros(4,2); -C zeros(2,2)];
```

```
Ba = [B; zeros(2,2)];
```

```
Q = diag([1,1,1,1,1,1]);
```

```
R = diag([1,1]);
```

```
Ka = lqr(Aa,Ba,Q,R);
```

```
K = Ka(:,1:4);
```

```
Ki = Ka(:,5:6);
```