Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 1 - Modelagem através da formulação lagrangeana [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

2 de agosto de 2017

[1] William F. Osgood, *Mechanics*, The Macmillan Company, 1949

Obtenção de modelos matemáticos de sistemas complexos

- Estudo de sistemas requer obter modelos matemáticos de sistemas reais.
- Modelos baseados em princípios físicos são os mais utilizados para controle de sistemas. P. ex.:
    - Sistemas mecânicos podem ser modelados através das leis de Newton.
    - Circuitos elétricos podem ser modelados aplicando-se as leis de Kirchhoff e conhecendo o modelo elétrico de cada componente do circuito.
- Interface de muitos subsistemas, interação entre subsistemas mecânicos translacionais e rotacionais, elétricos, químicos, etc., $\rightarrow$ métodos mais genéricos $\rightarrow$ sistematização do processo de modelagem.

Formulação lagrangeana

- Vantagem: eliminar forças de restrição que não realizam trabalho no sistema $\rightarrow \downarrow$ incógnitas desnecessárias.
- Envolve *coordenadas intrínsecas* e *funções intrínsecas*.
    - Funções intrínsecas: a energia cinética, o trabalho ou o seu negativo. i. e., a energia potencial.
    - Coordenadas intrínsecas: o número mínimo de variáveis independentes necessárias para descrever o sistema. Normalmente chamadas *coordenadas generalizadas*.

Equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

em que T é a energia cinética, V é a energia potencial, q_i é a i-ésima coordenada generalizada e $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

Exemplo motivador - massa deslizando em um fio

Suponhamos que uma massa pontual de massa m deslize em um fio cuja posição varie de acordo com:

$$x = \phi(q,t) \tag{2}$$
$$y = \vartheta(q,t) \tag{3}$$
$$z = \psi(q,t) \tag{4}$$

em que as funções ϕ, ϑ e ψ, bem como suas derivadas, são contínuas e $\frac{\partial\phi}{\partial q}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial q}$ e $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ não se anulam simultaneamente.
As equações de movimento são:

$$m\ddot{x} = X + \mathtt{X} \tag{5}$$
$$m\ddot{y} = Y + \mathtt{Y} \tag{6}$$
$$m\ddot{z} = Z + \mathtt{Z} \tag{7}$$

em que (X,Y,Z) são as forças aplicadas e $(\mathtt{X},\mathtt{Y},\mathtt{Z})$ são as forças de restrição.

Vínculo das forças de restrição

As forças de restrição obedecem:

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0, \tag{8}$$

em que (λ, μ, ν) representam um vetor tangente ao fio na posição da massa. Nesse ponto, o produto interno se anula pois as forças de reação são perpendiculares ao fio.

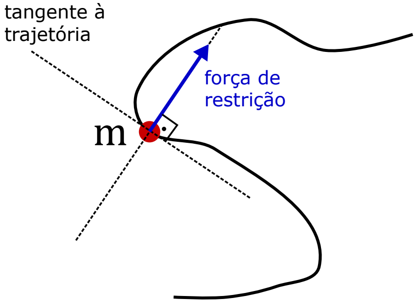

Figura: Fio e massa livre para se mover ao longo dele.

Eliminação das forças de restrição

Multiplicando (5) por $\frac{\partial x}{\partial q}$, (6) por $\frac{\partial y}{\partial q}$ e (7) por $\frac{\partial z}{\partial q}$ e somando, tem-se:

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q}\right)=X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q}+\underbrace{\mathtt{X}\frac{\partial x}{\partial q}+\mathtt{Y}\frac{\partial y}{\partial q}+\mathtt{Z}\frac{\partial z}{\partial q}}_{0} \tag{9}$$

em que o termo à direita se anula porque o vetor $\left(\frac{\partial x}{\partial q},\frac{\partial y}{\partial q},\frac{\partial z}{\partial q}\right)$ é tangente ao fio.

Tomando $Q=X\frac{\partial x}{\partial q}+Y\frac{\partial y}{\partial q}+Z\frac{\partial z}{\partial q}$, podemos escrever de forma compacta:

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q}\right)=Q \tag{10}$$

Energia cinética

Por outro lado, a função que representa a energia cinética é

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \tag{11}$$

em que

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \tag{12}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial y}{\partial t} \tag{13}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial z}{\partial t} \tag{14}$$

Derivadas da energia cinética com respeito a $\dot{q}$

Podemos derivar (11) com respeito a $\dot{q}$ para obter:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}}\right) \tag{15}$$

De (12), (13) e (14), têm-se:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial y}{\partial q} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial z}{\partial q} \tag{18}$$

Substituindo em (15):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{y}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{z}\frac{\partial x}{\partial q}\right) \tag{19}$$

Derivadas da energia cinética com respeito a q

Por outro lado, derivando (11) com respeito a q:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q}\right) \tag{20}$$

De (12), (13) e (14), têm-se:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} = \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \dot{z}}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \tag{23}$$

substituindo em (20), resulta:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\left[\dot{x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}\right) + \dot{y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t}\right)\right] \tag{24}$$

Derivada temporal

Agora, derivando (19) com respeito ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q} + \dot{y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q} + \dot{z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q}\right) \tag{25}$$

Calculando as derivadas com respeito ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial t} \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial t} \tag{28}$$

Observando os lados direitos de (21), (22) e (23) e de (26), (27) e (28), respectivamente, conclui-se que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q} \tag{30}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \tag{31}$$

Obtendo equação envolvendo forças generalizadas

Substituindo (29), (30) e (31) em (25):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \ddot{y}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \ddot{z}\frac{\partial x}{\partial q} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q}\right) \tag{32}$$

Reorganizando os termos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \underbrace{m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q}\right)}_{\frac{\partial T}{\partial q}} + \underbrace{m\left(\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial q} + \dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial q}\right)}_{Q} \tag{33}$$

De (20) e (10), conclui-se que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + Q \tag{34}$$

Presença de forças

O trabalho τ realizado por uma força F é:

$$\tau = \oint F \cdot d\vec{l} = \oint (F_x, F_y, F_z) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) dq \qquad (35)$$

desenvolvendo a expressão

$$\tau = \oint \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q} + F_y \frac{\partial y}{\partial q} + F_z \frac{\partial z}{\partial q} \right) dq \qquad (36)$$

Da definição de Q (10), tem-se que:

$$Q = F \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q} \right) \qquad (37)$$

isto é, precisamente o integrando de (36). Assim:

$$Q = \frac{\partial \tau}{\partial q} \qquad (38)$$

Obtendo a Equação de Lagrange

Então, para a coordenada q, (34) fica:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \tau}{\partial q} \quad (39)$$

em que τ é o trabalho das forças externas. Em particular, se forem conservativas, o trabalho não depende do caminho e o trabalho é o oposto da energia potencial associada V:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \quad (40)$$

Exemplos dessas forças são as forças gravitacional ($V = mgh$, m: massa do corpo, g: aceleração da gravidade e h: altura com relação ao ponto inicial) e elétrica ($V = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_0 r$, q_1: carga do corpo 1, q_2: carga do corpo 2, ε_0: permeabilidade elétrica do vácuo e r: distância com relação ao ponto inicial).

Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um arco de raio a que gira em torno de um eixo vertical com velocidade constante ω. Determine a dinâmica do ângulo θ que o raio unindo a massa ao centro do aro forma com o eixo vertical, como na Fig. 2.

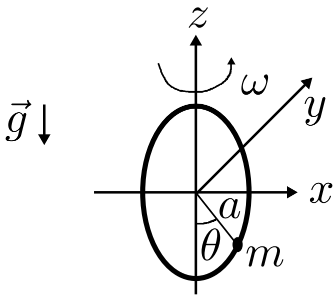

Figura: Aro girando com relação ao eixo vertical para o exemplo

Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = a\,\text{sen}\,(\theta)\cos(\omega t) \tag{41}$$

$$y = a\,\text{sen}\,(\theta)\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{42}$$

$$z = -a\cos(\theta) \tag{43}$$

em que $q = \theta$ é a coordenada generalizada.
Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = a\left[\dot{\theta}\cos(\theta)\cos(\omega t) - \omega\,\text{sen}\,(\theta)\,\text{sen}\,(\omega t)\right] \tag{44}$$

$$\dot{y} = a\left[\dot{\theta}\cos(\theta)\,\text{sen}\,(\omega t) + \omega\,\text{sen}\,(\theta)\cos(\omega t)\right] \tag{45}$$

$$\dot{z} = a\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) \tag{46}$$

Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] = \frac{ma^2}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \omega^2 \,\text{sen}^2(\theta)\right] \tag{47}$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ma^2\omega^2 \,\text{sen}\,(\theta)\cos(\theta) = \frac{m}{2}a^2\omega^2 \,\text{sen}\,(2\theta) \tag{48}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \tag{49}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\ddot{\theta} \tag{50}$$

Exemplo 1 - Massa pontual em um arco girante vertical

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgh = mga\left[1 - \cos(\theta)\right] \tag{51}$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga\,\text{sen}\left(\theta\right) \tag{52}$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$ma^2\ddot{\theta} - \frac{m}{2}a^2\omega^2\,\text{sen}\left(2\theta\right) = -mga\,\text{sen}\left(\theta\right) \tag{53}$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2}\,\text{sen}\left(2\theta\right) - \frac{g}{a}\,\text{sen}\left(\theta\right) \tag{54}$$

Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um fio que gira em torno de um eixo horizontal com velocidade constante ω. Determine a dinâmica da distância r entre a massa e o centro rotação, como na Fig. 3.

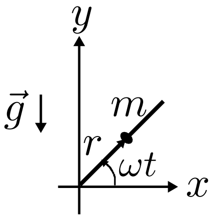

Figura: Fio girando com relação ao eixo horizontal para o exemplo

Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = r\cos(\omega t) \tag{55}$$

$$y = r\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{56}$$

em que $q = r$ é a coordenada generalizada.
Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\omega t) - r\omega\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{57}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\,\text{sen}\,(\omega t) + r\omega\cos(\omega t) \tag{58}$$

Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) \tag{59}$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\omega^2 \tag{60}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{61}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \tag{62}$$

Exemplo 2 - Massa pontual em um fio girante

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mgr\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{63}$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = mg\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{64}$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = -mg\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{65}$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - g\,\text{sen}\,(\omega t) \tag{66}$$

Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar em um arco que rola sobre um plano horizontal horizontal sem deslizar com velocidade constante v. Determine a dinâmica do ângulo θ entre o raio que se liga à massa e a vertical, como na Fig. 4.

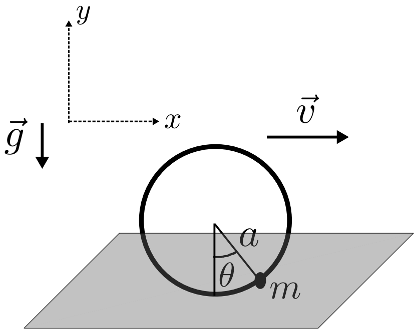

Figura: Aro rolando sobre um plano horizontal para o exemplo

Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = vt + a\,\text{sen}\,(\theta) \tag{67}$$

$$y = a\left[1 - \cos(\theta)\right] \tag{68}$$

em que $q = \theta$ é a coordenada generalizada.
Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = v + a\dot{\theta}\cos(\theta) \tag{69}$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) \tag{70}$$

Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left[v^2 + 2va\dot{\theta}\cos(\theta) + a^2\dot{\theta}^2\right] \tag{71}$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -mva\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) \tag{72}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mva\cos(\theta) + ma^2\dot{\theta} \tag{73}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -mva\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) + ma^2\ddot{\theta} \tag{74}$$

Exemplo 3 - Massa pontual em um arco rolante com velocidade constante

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mga\left[1 - \cos(\theta)\right] \tag{75}$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga\,\text{sen}\,(\theta) \tag{76}$$

Usando a Equação de Lagrange (40):

$$-mva\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) + ma^2\ddot{\theta} - \left[-mva\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta)\right] + mga\,\text{sen}\,(\theta) = 0 \tag{77}$$

Agrupando os termos e dividindo por ma^2:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\,\text{sen}\,(\theta) = 0 \tag{78}$$

que é a equação de um pêndulo simples.

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar em um arco que rola sobre um plano horizontal horizontal sem deslizar, porém sujeito a atrito com o solo, cujo coeficiente é μ. Assuma que a massa do aro é M. Determine a dinâmica do ângulo θ entre o raio que se liga à massa e a vertical, como na Fig. 5 e da posição horizontal do centro do arco x_M.

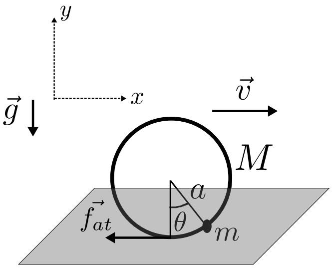

Figura: Aro rolando sobre um plano horizontal com atrito para o exemplo

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

O momento de inércia do aro é dado por

$$J = Ma^2. \tag{79}$$

A velocidade v é:

$$v = a\omega. \tag{80}$$

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições da massa m:

$$x = x_M + a\,\text{sen}\,(\theta) \tag{81}$$

$$y = a\,[1 - \cos(\theta)] \tag{82}$$

em que $q_1 = \theta$ e $q_2 = x_M$ são as coordenadas generalizadas. Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = v + a\dot{\theta}\cos(\theta) \tag{83}$$

$$\dot{y} = a\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) \tag{84}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia cinética é:

$$
\begin{aligned}
T =& \frac{M}{2}v^2 + \frac{J}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\\
=& \frac{M}{2}a^2\omega^2 + \frac{Ma^2}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}\left[v^2 + 2va\dot{\theta}\cos(\theta) + a^2\dot{\theta}^2\right]\\
=& Ma^2\omega^2 + \frac{m}{2}\left[v^2 + 2va\dot{\theta}\cos(\theta) + a^2\dot{\theta}^2\right]\\
=& M\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_M^2 + ma\dot{x}_M\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia cinética é:

$$T = M\dot{x}_M^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_M^2 + ma\dot{x}_M\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2 \qquad (85)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial x_M} = 0 \qquad (86)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ma\dot{x}_M\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,(\theta) \qquad (87)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} = 2M\dot{x}_M + m\dot{x}_M + ma\dot{\theta}\cos(\theta) \qquad (88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma\dot{x}_M\cos(\theta) + ma^2\dot{\theta} \qquad (89)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_M} = 2M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_M + ma\ddot{\theta}\cos(\theta) - ma\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,(\theta) \qquad (90)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma\ddot{x}_M\cos(\theta) - ma\dot{x}_M\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,(\theta) + ma^2\ddot{\theta} \qquad (91)$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mga\left[1 - \cos(\theta)\right] \tag{92}$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial x_M} = 0 \tag{93}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga\,\text{sen}\,(\theta) \tag{94}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

A força externa é o atrito, dado por:

$$Q_{x_M} = f_{at} = -\mu(M+m)g. \tag{95}$$

Usando a Equação de Lagrange (40) em cada coordenada generalizada:

$$x_M : (2M+m)\ddot{x}_M + ma\ddot{\theta}\cos(\theta) - ma\dot{\theta}^2 \,\text{sen}\,(\theta) = -\mu(M+m)g, \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\theta &: ma\ddot{x}_M\cos(\theta) - ma\dot{x}_M\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) + ma^2\ddot{\theta} + \\ &\quad + ma\dot{x}_M\dot{\theta}\,\text{sen}\,(\theta) + mga\,\text{sen}\,(\theta) = 0,\\ \theta &: \ddot{x}_M\cos(\theta) + a\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\,(\theta) = 0.\end{aligned} \tag{97}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

As equações (96) e (97) relacionam as acelerações segundo as coordenadas generalizadas x_M e θ. Se considerarmos que $M \gg m$ em (96), isto é, que a massa do aro é muito maior do que a da massa pontual, então:

$$\ddot{x}_M = -\frac{\mu}{2} g. \tag{98}$$

Substituindo $\ddot{x}_M$ de (98) em (97):

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\left[\frac{\mu}{2}\cos(\theta) - \text{sen}\,(\theta)\right]. \tag{99}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Encontrando o ponto de equilíbrio de (99):

$$\frac{\mu}{2}\cos(\theta_{eq}) - \text{sen}\,(\theta_{eq}) = 0 \rightarrow \theta_{eq} = \arctan\left(\frac{\mu}{2}\right). \tag{100}$$

Linearizando com pequenos deslocamentos $\delta\theta$ em torno deste ponto de equilíbrio, isto é, admitindo que $\theta = \theta_{eq} + \delta\theta$ em (99)

$$\begin{aligned}
\delta\ddot{\theta} =& \frac{g}{a}\left[\frac{\mu}{2}\frac{d}{d\theta}\cos(\theta)\bigg|_{\theta=\theta_{eq}} - \frac{d}{d\theta}\text{sen}\,(\theta)\bigg|_{\theta=\theta_{eq}}\right]\delta\theta, \\
=& \frac{g}{a}\left[-\frac{\mu}{2}\text{sen}\,(\theta_{eq}) - \cos(\theta_{eq})\right]\delta\theta, \\
=& \frac{g}{a}\left\{-\frac{\mu}{2}\text{sen}\left[\arctan\left(\frac{\mu}{2}\right)\right] - \cos\left[\arctan\left(\frac{\mu}{2}\right)\right]\right\}\delta\theta
\end{aligned} \tag{101}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Agora, usando relações trigonométricas, têm-se:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mu}{2}, \tag{102}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{103}$$

Resolvendo, encontram-se:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\mu}{2\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}}, \tag{104}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}}. \tag{105}$$

Donde, substituindo em (101), tem-se:

$$\delta\ddot{\theta} = -\frac{g\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}}{a}\delta\theta. \tag{106}$$

O modelo linearizado prevê oscilação como um pêndulo simples.

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Reescrevendo as equações (96) e (97) usando as variáveis de estado: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = x_M$ e $x_4 = \dot{x}_M$, têm-se:

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{107}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{a}\left[\dot{x}_4 \cos x_1 - g \,\mathrm{sen}\, x_1\right], \tag{108}$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \tag{109}$$

$$\dot{x}_4 = -\mu g \frac{m+M}{m+2M} + a\frac{m}{m+2M} x_2^2 \,\mathrm{sen}\, x_1 - a\frac{m}{m+2M}\dot{x}_2 \cos x_1. \tag{110}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Substituindo $\dot{x}_4$ de (110) em (108), obtém-se:

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{a}\left[\left(-\mu g\frac{m+M}{m+2M} + a\frac{m}{m+2M}x_2^2 \operatorname{sen} x_1 - a\frac{m}{m+2M}\dot{x}_2\cos x_1\right)\cos x_1 - g \operatorname{sen} x_1\right]. \tag{111}$$

Isolando $\dot{x}_2$ de (111):

$$\dot{x}_2 = \frac{\left(-\mu\frac{g}{a}\frac{m+M}{m+2M} + \frac{m}{m+2M}x_2^2 \operatorname{sen} x_1\right)\cos x_1 - \frac{g}{a}\operatorname{sen} x_1}{\left(1+\frac{m}{m+2M}\cos x_1\right)}. \tag{112}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Usando este valor de $\dot{x}_2$ em (110):

$$\dot{x}_4 = -\mu g \frac{m+M}{m+2M} + a \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1 + \\ -a \frac{m}{m+2M} \frac{\left(-\mu \frac{g}{a} \frac{m+M}{m+2M} + \frac{m}{m+2M} x_2^2 \operatorname{sen} x_1\right) \cos x_1 - \frac{g}{a} \operatorname{sen} x_1}{\left(1 + \frac{m}{m+2M} \cos x_1\right)} \cos x_1 \tag{113}$$

Desta forma, podem-se substituir (108) e (110) por (112) e (113) , respectivamente, para reescrever as equações de estado na forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \tag{114}$$

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Usando integração numérica de (114) podemos simular o comportamento da massa pontual presa ao aro rolante. Usando os seguintes valores para os parâmetros:

$$m = 1 \text{ kg}, \tag{115}$$

$$M = 200 \text{ kg}, \tag{116}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2, \tag{117}$$

$$\mu = 0{,}005 \text{ e} \tag{118}$$

$$a = 2{,}5 \text{ m} \tag{119}$$

e partindo da condição inicial $\mathbf{x}^T(0) = [0\ 0\ 0\ 2]$, simula-se o comportamento do sistema.

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

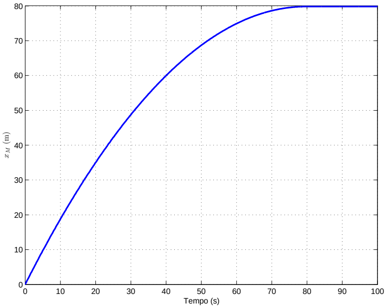

Figura: Posição do centro do aro pelo tempo na presença de atrito.

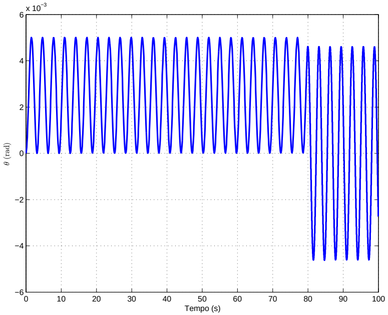

Figura: Posição angular da massa pontual pelo tempo na presença de atrito.

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito

Nota-se que

- Há desaceleração do aro até parar devido ao atrito.
- Há movimento oscilatório da massa pontual causado pelo movimento do aro.
- A oscilação se dá em torno de $\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0{,}0025$ rad com frequência aproximadamente dada por $\omega_{osc} = \sqrt{\frac{g\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+1}}{a}} = 2$ rad/s, que resulta em um período de $T_{osc} = \pi$ s, que são os valores obtidos pelo modelo linear aproximado quando $M \gg m$.
- Após o aro parar, a amplitude das oscilações angulares aumenta. Esta amplitude de oscilação após a parada do rolamento do aro depende de qual é o ângulo da massa pontual no instante em que o arco para, que serve como condição inicial para um movimento de pêndulo simples da massa em torno de $\theta = 0$.

Exemplo 4 - Massa pontual em um arco rolante sob atrito partindo de $x_4(0) = 2{,}2$ m/s

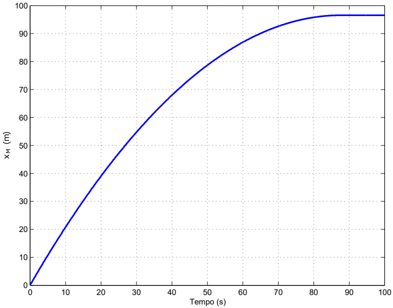

Figura: Posição do centro do aro pelo tempo na presença de atrito partindo de $x_4(0) = 2{,}2$ m/s.

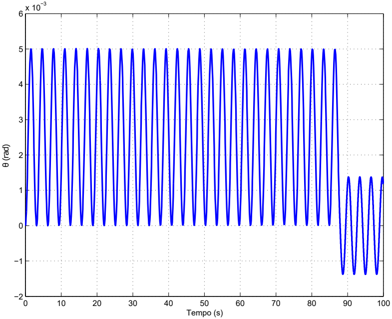

Figura: Posição angular da massa pontual pelo tempo na presença de atrito partindo de $x_4(0) = 2{,}2$ m/s.

Equação de Lagrange para sistemas com dissipação

Principalmente no caso de circuitos elétricos, usualmente há elementos dissipadores, tais como resistores. Nesse caso, a equação de Lagrange fica sendo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,\ 1 \leq i \leq n, \tag{120}$$

em que

- $L = T - V$ é o “lagrangeano”,
- R é a chamada função de dissipação de Rayleigh. Usualmente, **é igual à metade da potência dissipada**.

Exemplo 5 - Circuito RLC

No caso do circuito RLC a seguir, pode-se escolher como **coordenada generalizada a carga no capacitor** q, resultando que $\dot{q} = i$.

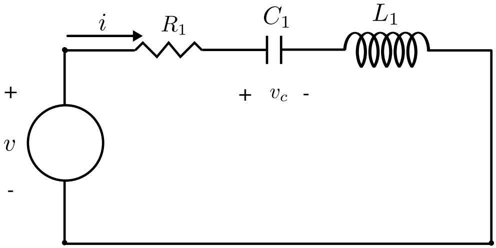

Figura: Circuito RLC

Exemplo 5 - Circuito RLC

Assim:

$$T = \frac{1}{2}L_1 i^2 = \frac{1}{2}L_1 \dot{q}^2, \text{ energia no indutor} \tag{121}$$

$$V = \frac{1}{2}C_1 v_c^2 = \frac{1}{2}C_1 \left(\frac{q}{C_1}\right)^2 = \frac{1}{2C_1}q^2, \text{ energia no capacitor} \tag{122}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}L_1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2C_1}q^2 \tag{123}$$

$$R = \frac{1}{2}R_1 i^2 = \frac{1}{2}R_1 \dot{q}^2, \text{ metade da potência dissipada no resistor} \tag{124}$$

$$Q = v \tag{125}$$

Exemplo 5 - Circuito RLC

Tomando as derivadas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_1\dot{q} \tag{126}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_1\ddot{q} \tag{127}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C_1} \tag{128}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = R_1\dot{q} \tag{129}$$

Substituindo na Equação de Lagrange (120):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = Q,$$

$$L_1\ddot{q} + \frac{q}{C_1} + R_1\dot{q} = v. \tag{130}$$

Exemplo 5 - Circuito RLC

O modelo obtido foi:

$$L_1\ddot{q} + \frac{q}{C_1} + R_1\dot{q} = v,$$

obtenha o modelo usando as leis de Kirchhoff e conclua sobre sua validade.