Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 10 - Análise de estabilidade de sistemas lineares usando desigualdades matriciais lineares [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

15 de setembro de 2017

[1] S. P. Boyd et al, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

Análise de sistemas lineares pelos métodos de Lyapunov

As funções de Lyapunov são aditivas, i. e., se $V_1(\mathbf{x})$ e $V_2(\mathbf{x})$ forem funções de Lyapunov para

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

então:

$$V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{x})$$

também é uma função de Lyapunov para (1).
Como muitos sistemas envolvem a conexão de partes lineares, é interessante avaliar a estabilidade do conjunto usando os métodos de Lyapunov.

Outra razão é o desenvolvimento de técnicas para avaliar a **robustez** de sistemas lineares a variações nos parâmetros de maneira a sintetizar controladores robustos usando otimização computacional. Relembre que o critério de Routh-Hurwitz serve para avaliar a estabilidade face a variações nos parâmetros, mas sua aplicação para síntese é limitada. Por outro lado, usando os métodos de Lyapunov, pode-se escrever este problema de análise/síntese na forma de um problema de otimização numérica para o qual existem algoritmos de solução eficientes.

Definições preliminares

Definição

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica se $M = M^T$ [a].

[a] M é antissimétrica se $M = -M^T$.

Definição

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positivo definida (PD) se

$$\mathbf{x}^T M \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0.$$

Notação: $M > 0$.

Definição

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é positivo semidefinida (PSD) se

$$\mathbf{x}^T M\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}.$$

Notação: $M \geq 0$.

Definição

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é negativo definida (ND) se $-M$ é PD.
Notação: $M < 0$.

Definição

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é negativo semidefinida (NSD) se $-M$ é PSD.
Notação: $M \leq 0$.

Tomemos o sistema linear e invariante no tempo (autônomo) – LIT (*Linear Time Invariant*):

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \tag{2}$$

Neste caso, que tipo de candidata a função de Lyapunov poderíamos usar? Parece natural escolher uma forma quadrática, como:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}, \tag{3}$$

em que $P > 0$. Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} = (A\mathbf{x})^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + PA)\mathbf{x}. \tag{4}$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$ será ND se a matriz $A^T P + PA < 0$, i. e., se houver uma matriz $Q > 0$ tal que:

$$A^T P + PA = -Q. \tag{5}$$

A equação (5) é chamada de **Equação de Lyapunov**.

Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pode ser decomposta na soma de uma parte simétrica P_s e uma antissimétrica P_{as}:

$$P = P_s + P_{as}, \qquad P_s = \frac{P+P^T}{2}, \; P_{as} = \frac{P-P^T}{2}$$

Dessa forma:

$$(\mathbf{x}^T P\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T P^T \mathbf{x} = \cancel{\mathbf{x}^T P_s \mathbf{x}} - \mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x} \underbrace{=}_{\mathbf{x}^T P\mathbf{x}\in\mathbb{R}} \mathbf{x}^T P\mathbf{x} = \cancel{\mathbf{x}^T P_s \mathbf{x}} + \mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x}$$

$$-\mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x} \Rightarrow 2\mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x} = 0.$$

Assim

$$\mathbf{x}^T P\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_s\mathbf{x} + \cancelto{0}{\mathbf{x}^T P_{as}\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T P_s\mathbf{x}.$$

Vamos restringir a busca às matrizes P simétricas, visto que isto não altera o valor de $V(\mathbf{x})$. Caso $P = P^T$, então, da equação de Lyapunov (5):

$$-Q = A^T P + PA = A^T P^T + P^T A = (A^T P + PA)^T = -Q^T,$$

isto é, a matriz Q também deve ser simétrica.
Desta forma, restringe-se a busca a matrizes P e Q simétricas e PD que satisfaçam (5) para demonstrar que a origem é PE estável do sistema (2). Contudo, arbitrando P pode-se encontrar Q que não seja PD. Como a condição é apenas suficiente, nada se pode afirmar.

Exemplo: considere um sistema da forma (2), em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix},$$

e arbitra-se:

$$P = I.$$

Então, usando (5):

$$Q = -\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 24 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 8x_1x_2 + 24x_2^2 = 0, \forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Q \text{ não é PD.}$$

Com isso, não conseguimos concluir nada a respeito da estabilidade da origem do sistema (2).

Proposta de procedimento

Podemos resolver (5) para P dada uma matriz Q simétrica e PD, de forma a maximizar as chances de satisfazer as condições para estabilidade. Retomando o exemplo anterior com $Q = I$, a equação de Lyapunov (5) fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4p_{12} & 4p_{22} \\ -8p_{11} - 12p_{12} & -8p_{12} - 12p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4p_{12} & -8p_{11} - 12p_{12} \\ 4p_{22} & -8p_{12} - 12p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8p_{12} & -8p_{11} - 12p_{12} + 4p_{22} \\ -8p_{11} - 12p_{12} + 4p_{22} & -16p_{12} - 24p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde

$$p_{12} = -\frac{1}{8}, \quad p_{22} = \frac{1}{8}, \quad p_{11} = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{x}^T P\mathbf{x} = p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2 = \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{8}x_2^2 = \frac{1}{8}[2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2] = \frac{1}{8}[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2] > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \rightarrow P \text{ é PD.}$$

Assim, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ é uma função de Lyapunov para o sistema (2) $\rightarrow$ a origem é PE estável. Adicionalmente, como $Q > 0$, pode-se concluir que a estabilidade é assintótica.

Observação: usando o teorema “Segundo método de Lyapunov – versão global”, chega-se a uma condição suficiente para a estabilidade. No entanto, para o sistema (2) LIT, é possível obter uma condição necessária.

Determinando se uma matriz é PD

Problema

Como determinar se a matriz obtida $P > 0$?

Uma alternativa para isso consiste em usar o critério de Sylvester:

Critério (de Sylvester)

Uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é PD se e somente se

- $det([m_{ij}]) > 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,i$, *isto é, se todos os blocos quadrados construídos a partir do elemento m_{11} tiverem determinantes positivos.*

Teorema (Estabilidade de sistema LIT – condição necessária e suficiente)

A origem é PE estável do sistema (2) *se e somente se, para qualquer matriz* $Q > 0$ *simétrica, a solução única* P *da equação de Lyapunov* (5) *for simétrica e PD.*

Demonstração.

Já mostramos que a condição é suficiente aplicando o segundo método de Lyapunov. Seja $Q > 0$ uma matriz simétrica e seja:

$$P = \int_0^\infty e^{A^T\tau} Q e^{A\tau} d\tau,$$

esta integral converge se e somente se A for estável.

$\square$

Continuação.

$$P^T = \int_0^\infty (e^{A\tau})^T Q^T (e^{A^T\tau})^T d\tau = \int_0^\infty e^{A^T\tau} Q e^{A\tau} d\tau = P,$$

$$\mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{x}^T e^{A^T\tau}}_{\mathbf{y}^T} Q \underbrace{e^{A\tau}\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} d\tau = \int_0^\infty \underbrace{\mathbf{y}^T Q \mathbf{y}}_{\geq 0} d\tau \geq 0,$$

Lembrando que A é estável, então $e^{A\tau}$ é não singular, resultando que $\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y} = 0$, então $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$. Isto é, esta definição resulta em $P > 0$ e $P = P^T$.

Como A é estável, tem-se que $e^{A\tau} \underset{\tau \to \infty}{\longrightarrow} 0$, donde se pode escrever:

$$-Q = -IQI = \underbrace{e^{A^T\infty}}_{0} Q \underbrace{e^{A\infty}}_{0} - \underbrace{e^{A^T 0}}_{I} Q \underbrace{e^{A0}}_{I} = \int_{\tau=0}^\infty d[e^{A^T\tau} Q e^{A\tau}]$$

$\square$

Continuação.

Realizando a mudança de variáveis de integração:

$$
\begin{aligned}
-Q = \int_{\tau=0}^{\infty} d[e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}] &= \int_0^{\infty} \frac{d}{d\tau}[e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}]d\tau \\
\int_0^{\infty} [A^T e^{A^T\tau}Qe^{A\tau} &+ e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}A]d\tau \\
A^T \int_0^{\infty} e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau + \int_0^{\infty} e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau A &= A^T P + PA.
\end{aligned}
$$

Demonstrando que se A é estável, então P é solução PD e simétrica da equação de Lyapunov (5) – **condição necessária**.

$\square$

Continuação.

Para demonstrar que esta solução é única, basta escrever a candidata a solução P_1 como:

$$P_1 = -\int_{\tau=0}^{\infty} d[e^{A^T\tau}P_1 e^{A\tau}] = -\int_0^{\infty} e^{A^T\tau}(A^T P_1 + P_1 A)e^{A\tau}d\tau$$
$$\int_0^{\infty} e^{A^T\tau}Qe^{A\tau}d\tau = P,$$

isto é, qualquer candidata deve ser a própria solução que já foi determinada. $\square$

A busca de uma solução simétrica $P > 0$ para a equação de Lyapunov (5) dada uma matriz simétrica $Q > 0$ pode ser feita numericamente sem necessidade de resolver o sistema linear de equações resultante sobre as componentes de P. Para isso, reescreve-se o problema como:

Problema

Encontrar P tal que:

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P + PA &< 0. \end{aligned}$$

Este problema pode ser encarado como um problema de programação semidefinida (*Semidefite Programming* – SDP), em que se deseja encontrar uma solução viável. Em particular, a categoria de problema SDP em que se encaixa é chamado de problema com Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* – LMI). Existem diversos pacotes computacionais eficientes disponíveis para resolver este tipo de problema, como LMILAB, SeDuMi, MOSEK, entre outros.

Exemplo computacional

Usando o pacote YALMIP, pode-se escrever o problema SDP com LMI e realizar a solução numérica através de diversos pacotes de solução diferentes[2].

Definindo a matriz A do sistema e definindo a matriz P como variável SDP:

```
A = [-1 2 0;-3 -4 1;0 0 -2];
P = sdpvar(3,3);
```

Escrevendo as restrições ($P > 0$ e $A^T P + PA < 0$):

```
F = [P >= 0, A'*P+P*A <= 0];
```

[2] https://yalmip.github.io/tutorial/semidefiniteprogramming/

```
F = [P >= 0, A'*P+P*A <= 0];
```

Ressalta-se que as restrições adicionadas não são estritas, como devem ser para aplicação do teorema, pois não se pode fazer dessa forma no problema SDP. Para isso, pode-se definir uma margem pequena o suficiente e impor $P \geq \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$, que significa que $P - \varepsilon I \geq 0$ (a matriz $P - \varepsilon I$ é PSD).

$$\mathbf{x}^T(P-\varepsilon I)\mathbf{x} \geq 0 \rightarrow \mathbf{x}^T P\mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T \varepsilon I\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{x}^T\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0,$$
$$\mathbf{x}^T P\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \rightarrow P > 0.$$

Assim:

```
epsilon = 1e-6;
F = [P >= epsilon*eye(3), A'*P+P*A <= -epsilon*eye(3)];
```

Resolvendo o problema e atribuindo a solução à variável `Pfeasible`:

```
optimize(F);
Pfeasible = value(P);
```

obtém-se:

```
Pfeasible =
    0.5603    0.0452   -0.0070
    0.0452    0.2490    0.0348
   -0.0070    0.0348    0.4116
```

que é um resultado dependente de máquina, algoritmo de solução, implementação computacional e tolerâncias numéricas. Usando o critério de Sylvester:

$$\left.\begin{array}{l} p_{11} = 0{,}5603 > 0 \\ \begin{vmatrix} 0{,}5603 & 0{,}0452 \\ 0{,}0452 & 0{,}2490 \end{vmatrix} = 0{,}1374 > 0 \\ \det P = 0{,}0559 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P > 0.$$

Calculando $Q = -(A^T P + PA)$:

```
Q = -(A'*Pfeasible+Pfeasible*A)
Q =
    1.3918   -0.1475    0.0384
   -0.1475    1.8108   -0.0260
    0.0384   -0.0260    1.5766
```

Aplicando o critério de Sylvester a Q:

$$\left.\begin{array}{l} q_{11} = 1{,}3918 > 0 \\ \begin{vmatrix} 1{,}3918 & -0{,}1475 \\ -0{,}1475 & 1{,}8108 \end{vmatrix} = 2{,}4986 > 0 \\ \det Q = 3{,}9360 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q > 0.$$

Conclusão: pelo teorema de estabilidade de sistema LIT, a origem é PE assintoticamente estável do sistema (2) com:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Forma mais simples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ 3 & \lambda+4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 20\lambda + 20$$

Autovalores

$\lambda_1 = -2{,}5 + 1{,}9365j, \quad \lambda_2 = -2{,}5 - 1{,}9365j, \quad \lambda_3 = -2.$

Isto é, pelo primeiro método de Lyapunov, já se poderia concluir que a origem é PE assintoticamente estável.

Pergunta

Então, por que usar LMI para análise de estabilidade de sistemas lineares?

Esboço da resposta: robustez da estabilidade a variação de parâmetros

Suponhamos que a matriz A tenha um parâmetro α incerto, porém limitado a um intervalo conhecido $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz pode ser escrita como uma combinação convexa $A = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2$, em que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1, \rho_2 \geq 0, \; \rho_1 + \rho_2 = 1.$$

Para estabilidade, devem-se satisfazer:

$$
\begin{aligned}
&P > 0 \\
&A^T P + PA < 0 \\
&\forall A = \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2,\ \rho_1, \rho_2 \geq 0,\ \rho_1 + \rho_2 = 1
\end{aligned}
$$

Problema

Se ρ_1 e ρ_2 foram variáveis, as desigualdades $A^T P + PA < 0$ envolverão produto de variáveis, deixando de serem LMI. Como reescrever este problema de maneira a eliminar as variáveis ρ_1 e ρ_2?

Uma saída: convexidade

Reescrevendo:

$$\begin{aligned} A^T P + PA =& (\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2)^T P + P(\rho_1 A_1 + \rho_2 A_2) \\ & \rho_1 (A_1^T P + PA_1) + \rho_2 (A_2^T P + PA_2). \end{aligned}$$

Se impusermos:

$$\begin{aligned} A_1^T P + PA_1 < 0, \\ A_2^T P + PA_2 < 0, \end{aligned}$$

então, como $\rho_1, \ \rho_2 \geq 0$:

$$A^T P + PA = \rho_1 \underbrace{(A_1^T P + PA_1)}_{<0} + \rho_2 \underbrace{(A_2^T P + PA_2)}_{<0} < 0.$$

Para estabilidade, devem-se satisfazer:

$$P > 0$$
$$A_1^T P + PA_1 < 0$$
$$A_2^T P + PA_2 < 0$$

Resolvendo computacionalmente para $\underline{\alpha} = -5$ e $\overline{\alpha} = 0$:

```
alpha_inf = -5;
alpha_sup = 0;

A1 =      [alpha_inf      2       0
                  -3     -4       1
                   0      0      -2 ];

A2 =      [alpha_sup      2       0
                  -3     -4       1
                   0      0      -2 ];
```

Definindo P como matriz simétrica e PD e adicionando restrições:

```
P = sdpvar(3,3);
epsilon = 1e-6;
F = [P >= epsilon*eye(3), ...
A1'*P + P*A1 <= -epsilon*eye(3), ...
A2'*P + P*A2 <= -epsilon*eye(3)];
```

Achando solução viável:

```
optimize(F)
Pfeasible = value(P)
Pfeasible =

    0.2592    0.0543   -0.0031
    0.0543    0.1732    0.0259
   -0.0031    0.0259    0.3435
```

Verificando se é PD:

```
Pfeasible(1,1)
ans = 0.2592
det(Pfeasible(1:2,1:2))
ans = 0.0419
det(Pfeasible)
ans = 0.0142
```

Saída na tela:

```
    yalmiptime: 0.2844
    solvertime: 0.0226
          info: 'Successfully solved (SeDuMi-1.3)'
       problem: 0
```

Outra maneira mais fácil

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & -2 & 0 \\ 3 & \lambda + 4 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^3 + (6-\alpha)\lambda^2 + (14-6\alpha)\lambda + (12-8\alpha)$$

Construindo a tabela de Routh associada a este polinômio:

s^3	1	$14-6\alpha$
s^2	$6-\alpha$	$12-8\alpha$
s^1	$\frac{6\alpha^2-42\alpha+78}{6-\alpha}$	
s^0	$12-8\alpha$	

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz:

$\alpha < 6, \quad \alpha < 1{,}5, \quad (\alpha^2 - 7\alpha + 13 > 0, \forall \alpha).$

Verificando faixa computacionalmente

Com $\overline{\alpha} = 1{,}45$, saída na tela:

```
yalmiptime: 0.2691
solvertime: 0.0309
      info: 'Successfully solved (SeDuMi-1.3)'
   problem: 0
```

Com $\overline{\alpha} = 1{,}55$, saída na tela:

```
yalmiptime: 0.2730
solvertime: 0.0750
      info: 'Infeasible problem (SeDuMi-1.3)'
   problem: 1
```

Infeasible problem $\Rightarrow$ não foi possível encontrar solução que atenda às desigualdades.

Mais uma vez...

Pergunta

Então, por que usar LMI para análise de estabilidade de sistemas lineares?

Resposta 1

Claramente, usar o critério de Routh-Hurwitz com diversos parâmetros variáveis pode resultar em múltiplas equações não lineares nos parâmetros para determinar as faixas de estabilidade. Nesse caso, usando LMI seria simplesmente o caso de se adicionarem mais desigualdades para novos vértices de matrizes $A_3, A_4, \ldots$

Resposta 2

Síntese de controladores lineares robustos otimizando critérios de desempenho.

Exemplo de aplicação para síntese

Considere um sistema LIT incerto descrito pela equação no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + Bu(t), \tag{6}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle e $A(\rho)$ é uma matriz desconhecida, a qual pertence a um domínio convexo e limitado incerto (politópico) Θ dado por

$$\Theta = \left\{ A(\rho) : A(\rho) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i, \rho \in \Phi \right\} \tag{7}$$

com

$$\Phi = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^N, \ \sum_{i=1}^{N} \rho_i = 1; \ \rho_i \geq 0 \right\}. \tag{8}$$

Qualquer matriz $A(\rho)$ em Θ pode ser descrita como combinação convexa dos vértices A_i, $i = 1,\ldots,N$ do politopo. Usando a candidata a função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \tag{9}$$

tem-se

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = \{[A(\rho) + BK]\,\mathbf{x}\}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \{[A(\rho) + BK]\,\mathbf{x}\}, \tag{10}$$

que será ND para qualquer ρ se

$$(A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) < 0, \forall i \in \{1,2,\ldots N\}. \tag{11}$$

$$(A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) < 0, \forall i \in \{1,2,\ldots N\}. \quad (12)$$

Admitindo uma mudança de variáveis por meio de uma transformação não singular $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}^T \left[(A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) \right] \mathbf{x} < 0$$

$$\mathbf{y}^T (P^{-1})^T \left[(A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) \right] P^{-1}\mathbf{y} < 0$$

$$\mathbf{y}^T \left[\left(A_i P^{-1} + BKP^{-1}\right)^T + \left(A_i P^{-1} + BKP^{-1}\right) \right] \mathbf{y} < 0$$

$$\left(A_i P^{-1} + BKP^{-1}\right)^T + \left(A_i P^{-1} + BKP^{-1}\right) < 0$$

$$\left(A_iP^{-1}+BKP^{-1}\right)^T+\left(A_iP^{-1}+BKP^{-1}\right)<0$$
$$(A_iY+BKY)^T+(A_iY+BKY)<0$$

Esta última não é LMI, pois envolve o produto das variáveis K e $Y=P^{-1}$. Reescrevendo em termos de uma nova variável $X=KY$, tem-se.

$$YA_i^T+A_iY+X^TB^T+BX<0, \forall i \in \{1,2,\dots N\}. \tag{13}$$

Assim, chegamos às LMIs para estabilidade. O problema tem duas variáveis X e Y, que devem satisfazer às seguintes LMIs:

$$\begin{aligned} & YA_i^T + A_iY + X^TB^T + BX < 0 \\ & Y > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

O ganho do controlador pode ser recuperado fazendo $K = XY^{-1} = XP$.

Exemplo: massa mola com incerteza na constante de mola

Um sistema massa mola com massa $m = 1$ kg, incerteza na constante de mola $k \in [1,\ 4]$ N/m e variável de controle sendo a força sobre a massa pode ser modelado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\rho)\mathbf{x} + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1-\rho) - 5\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

em que os vértices do politopo Θ são

$$A_1 = A(\rho = 0) \text{ e } A_2 = A(\rho = 1).$$

$$A_1 = A(\rho = 0) \text{ e } A_2 = A(\rho = 1).$$

Resolvendo para encontrar X e Y que satisfaçam às LMIs (14), têm-se:

$$Y = \begin{bmatrix} 0{,}2786 & -0{,}2947 \\ -0{,}2947 & 1{,}305 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} -0{,}4041 & -1{,}559 \end{bmatrix},$$
$$K = XY^{-1} = \begin{bmatrix} -3{,}566 & -2{,}000 \end{bmatrix}.$$

Com este ganho, os autovalores de $A_1 + BK$ e $A_2 + BK$, são $-1{,}000 \pm 1{,}888j$ e $-1{,}000 + 2{,}562j$, respectivamente.

Impondo taxa de decaimento mínima

Se pudermos impor que:

$$\dot{V} < -2\alpha V,$$

Então o sistema será exponencialmente estável:

$$\dot{V} + 2\alpha V = e^{-2\alpha t}\frac{d}{dt}\left(e^{2\alpha t}V\right) < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{2\alpha t}V\right) < 0,$$
$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}V\right)dt < 0,$$
$$e^{2\alpha t}V(\mathbf{x}(t)) - e^{2\alpha 0}V(\mathbf{x}(0)) < 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}(t)) < e^{-2\alpha t}V(\mathbf{x}(0)).$$

Com

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t),$$
$$\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) < e^{-2\alpha t}\mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0),$$
$$\|\mathbf{x}(t)\| < e^{-\alpha t}\|\mathbf{x}(0)\|.$$