Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 12 - Controle por Modos Deslizantes [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

18 de outubro de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 7, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Problema de rastreio

Seja o sistema não linear dado por

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

em que x é a variável de interesse. Admitindo que se deseje fazer com que o vetor de estados $\mathbf{x}$ rastreie uma referência conhecida $\mathbf{x}_d$, a ideia do controle por modos deslizantes consiste em definir uma superfície onde a dinâmica do erro

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d, \tag{3}$$

seja adequada e aplicar o controle necessário para conduzir o estado para essa superfície.

Superfície de deslizamento

Uma superfície $S(t)$ pode ser definida a partir da equação:

$$s(\mathbf{x},t) = 0. \tag{4}$$

(5)

Uma escolha usual para $s(\mathbf{x},t)$ é

$$s(\mathbf{x},t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x},\ \lambda > 0, \tag{6}$$

(7)

em que $\tilde{x} = x - x_d$. Dessa forma:

$$s(\mathbf{x},t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x} = 0, \tag{8}$$

(9)

isto é, $\tilde{x} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemplos de superfícies de deslizamento

$$s(\mathbf{x},t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x},\ \lambda > 0.$$

- $n = 2 \Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} + \lambda\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{x}(0)e^{-\lambda t} \Rightarrow \tilde{x} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
- $n = 3 \Rightarrow \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\tilde{x}}{dt} + \lambda^2\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x}(t) =$ $\tilde{x}(0)e^{-\lambda t} + t[\dot{\tilde{x}}(0) + \lambda\tilde{x}(0)]e^{-\lambda t} \Rightarrow \tilde{x} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Simplificação do problema de rastreio

- Na superfície de deslizamento, o erro de rastreio $\tilde{\mathbf{x}}$ converge para zero, então o problema de rastreio pode ser equivalentemente resolvido desde que o estado $\mathbf{x}$ permaneça na superfície $S(t)$.
- Reduz o problema de rastreio de referência no $\mathbb{R}^n$ a um problema de regular o escalar:

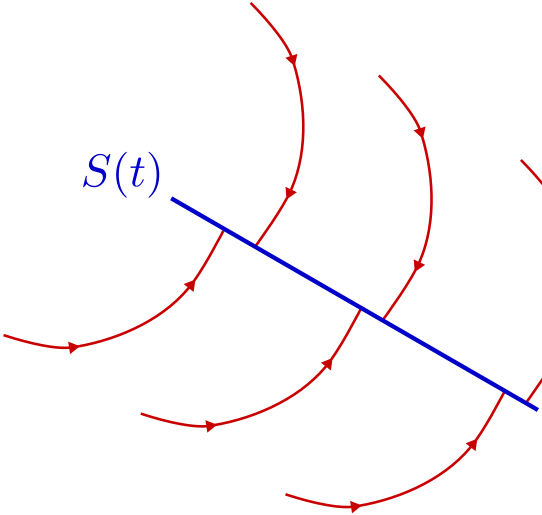
$$s(\mathbf{x},t) \to 0.$$

- Calculando o valor de s^2 (uma espécie de medida da "distância" entre o valor atual de s e o seu valor desejado – 0), deseja-se que s^2 convirja para zero. Por exemplo, pode-se impor que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s|,\ \eta > 0. \tag{10}$$

A condição expressa em (10) é chamada "condição de deslizamento". Com efeito, como a derivada temporal tem sinal oposto ao de s^2, a menos quando $s = 0$, esta condição implica que $s^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para $n = 2$, pode-se representar o problema de convergência para a superfície de deslizamento a partir de diferentes condições iniciais:



Convergência para a superfície de deslizamento

A condição de deslizamento (10) impõe que qualquer **trajetória convirja para a superfície de deslizamento em tempo finito.** Com efeito,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\frac{ds}{dt} \leq -\eta|s|, \tag{11}$$

- Supondo $s > 0$ em (11):

$$s\frac{ds}{dt} \leq -\eta s \Rightarrow \frac{ds}{dt} \leq -\eta,$$
$$\int_0^\tau \frac{ds}{dt}dt \leq -\int_0^\tau \eta dt$$
$$s(\mathbf{x}(\tau),\tau) - s(\mathbf{x}(0),0) \leq -\tau\eta$$

Admitindo que $s(\mathbf{x}(\tau),\tau) = 0$, i. e., a superfície de deslizamento foi atingida, tem-se que:

$$\tau \leq \frac{s(\mathbf{x}(0),0)}{\eta}$$

De maneira similar:

- Supondo $s < 0$ em (11):

$$
\begin{gathered}
s\frac{ds}{dt} \leq \eta s \Rightarrow \frac{ds}{dt} \geq \eta, \\
\int_0^\tau \frac{ds}{dt} dt \geq \int_0^\tau \eta dt \\
s(\mathbf{x}(\tau),\tau) - s(\mathbf{x}(0),0) \geq \tau\eta
\end{gathered}
$$

Admitindo que $s(\mathbf{x}(\tau),\tau) = 0$, i e., a superfície de deslizamento foi atingida, tem-se que:

$$
\tau \leq \frac{-s(\mathbf{x}(0),0)}{\eta}
$$

Donde se conclui que a superfície de deslizamento é atingida em um tempo t_r:

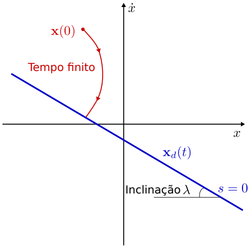
$$
t_r \leq \frac{|s(\mathbf{x}(0),0)|}{\eta}.
$$

Convergência assintótica para a referência

1. Tempo para convergir de qualquer condição inicial para a superfície é de t_r, finito.
2. Na superfície, o erro segue uma dinâmica assintoticamente estável:

$$s(\mathbf{x},t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x},\ \lambda > 0.$$

Conclui-se, portanto, que o o estado segue assintoticamente para a referência, conforme ilustrado na figura para $n = 2$.



Problema reduzido

O problema restante consiste em se determinar a lei de controle u que conduza o sistema para a superfície de deslizamento (4) e o mantenha lá. Sua construção formal se deve ao matemático russo A.F. Fillipov, interpretada a seguir.

Para manter o sistema na superfície (de forma que esta seja um conjunto invariante), requer-se que:

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = 0 \text{ quando } s(\mathbf{x},t) = 0,$$

isto é, que a derivada seja zero quando na superfície, para não sair da mesma.

Caso $n = 2$

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)\tilde{x} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda\dot{\tilde{x}} = 0.$$

Substituindo $\ddot{x}$ de (1):

$$\ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = 0, \tag{12}$$

$$u = u_{eq} = \frac{1}{g(\mathbf{x})}\left[\ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} - f(\mathbf{x})\right], \tag{13}$$

em que u_{eq} é chamado de **controle equivalente**.

Características de robustez

Caso existam parâmetros incertos em f e g, não se consegue determinar a lei de controle (13). Contudo, ainda é possível encontrar uma lei de controle similar que satisfaça a condição de deslizamento (10), desde que se conheçam limitantes para as incertezas sobre os parâmetros desconhecidos.

Por exemplo, para um sistema com $n = 2$:

$$\ddot{x} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u,$$

vamos assumir que não se conhece f. Assim, vamos usar uma estimativa $\hat{f}$ na lei de controle, e o erro de estimação é limitado:

$$|\hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq F(\mathbf{x}). \tag{14}$$

Derivando a superfície de deslizamento com respeito ao tempo

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}.$$

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}.$$

O problema agora é que não se conhece f para determinar a lei de controle. Então, vamos usar a estimativa $\hat{f}$ no lugar de f:

$$u = \hat{u} = \frac{1}{g(\mathbf{x})}\left[\ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} - \hat{f}(\mathbf{x})\right]$$

resultando em

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}),$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\dot{s} = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right], \qquad (15)$$

que não satisfaz a condição de deslizamento (10). Observando a estrutura de (15) e de (10), nota-se que se pode adicionar um termo à lei de controle de modo que se cancele o lado direito de (15) para obter o lado direito de (10).

Lei de controle

$$u = \hat{u} - \frac{1}{g(\mathbf{x})} k\,\mathrm{sgn}(s) = \frac{1}{g(\mathbf{x})}\left[\ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} - \hat{f}(\mathbf{x}) - k\,\mathrm{sgn}(s)\right]$$

resultando em

$$\dot{s}(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) - k\,\mathrm{sgn}(s),$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\dot{s} = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x}) - k\,\mathrm{sgn}(s)\right] = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right] - k|s|. \quad (16)$$

Escolhendo $k = F(\mathbf{x}) + \eta$ em (16):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right] - F(\mathbf{x})|s| - \eta|s|. \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right] - F(\mathbf{x})|s| - \eta|s|.$$

Por outro lado,

$$s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right] - F(\mathbf{x})|s| \leq \left|f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right| |s| - F(\mathbf{x})|s| \underbrace{\leq}_{(14)} 0. \qquad (18)$$

Com isso, pode-se limitar o lado esquerdo de (16):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 = s\left[f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right] - F(\mathbf{x})|s| - \eta|s| \leq -\eta|s|, \qquad (19)$$

que é exatamente a condição de deslizamento desejada (10).

Exemplo

Dado o sistema

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x}^2\cos(3x) = u,$$
$$\ddot{x} = \underbrace{-a(t)\dot{x}^2\cos(3x)}_{f(\mathbf{x})} + u,$$

em que o valor do parâmetro a é desconhecido (e variante no tempo), porém seus limites são conhecidos $a \in [1,\ 2]$. Escolhendo a estimativa para estar no meio do intervalo, tem-se

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = -1{,}5\dot{x}^2\cos(3x). \tag{20}$$

Assim,

$$\left|f(\mathbf{x}) - \hat{f}(\mathbf{x})\right| \leq 0{,}5\dot{x}^2|\cos(3x)| = F(\mathbf{x}). \tag{21}$$

Fazendo

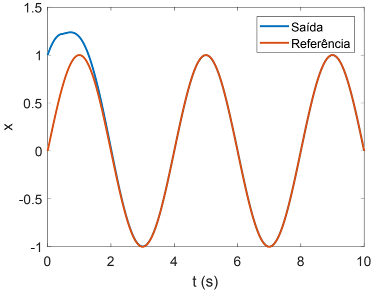
$$\hat{u} = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} - \hat{f}(\mathbf{x}) = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + 1{,}5\dot{x}^2\cos(3x)$$

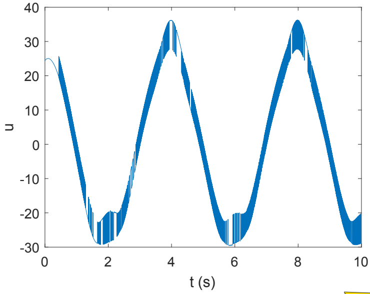
e

$$\begin{aligned} u = & \hat{u} - k\,\mathrm{sgn}(s) = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} - \hat{f}(\mathbf{x}) - [F(\mathbf{x}) + \eta]\,\mathrm{sgn}(s) \\ & \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + 1{,}5\dot{x}^2\cos(3x) - 0{,}5\dot{x}^2|\cos(3x)|\,\mathrm{sgn}(s) + \eta\,\mathrm{sgn}(s) \\ & \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + 1{,}5\dot{x}^2\cos(3x) - 0{,}5\dot{x}^2|\cos(3x)|\,\mathrm{sgn}(\dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}) + \eta\,\mathrm{sgn}(\dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}). \end{aligned}$$

$$u = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + 1{,}5\dot{x}^2\cos(3x) - 0{,}5\dot{x}^2|\cos(3x)|\,\mathrm{sgn}(\dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}) + \eta\,\mathrm{sgn}(\dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x}).$$

Os resultados de simulação para $\lambda = 2$ e $\eta = 3$, com $a(t) = 1 + |\mathrm{sen}(t)|$ são mostrados a seguir para $x_d(t) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ e $\mathbf{x}(0)^T = [1 \;\; 1]$:





Fenômeno de "chattering"

Um problema com esta lei de controle são as oscilações de alta frequência e amplitude observadas no exemplo anterior. Elas provêm do fato de que necessitou-se usar a função sgn, visto que a lei de controle tem que conter uma descontinuidade em $s = 0$, pois $\dot{s}$ tem que ter sinais opostos em cada lado da superfície para que a condição de deslizamento seja satisfeita. Como consequências:

- Excitar dinâmicas não modeladas de mais alta ordem.
- Desgastar os atuadores.
- Desperdiçar energia.

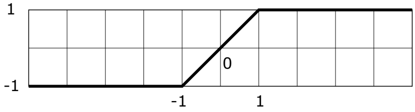
Quando for necessário evitar o chattering, pode-se recorrer a funções contínuas cujo comportamento se assemelhe ao da função sgn.

Reduzindo “chattering”

Pode-se utilizar uma função contínua que se assemelhe à função sgn.
Exemplos:

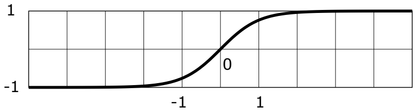
- Saturação:

$$\operatorname{sat}(x) = \begin{cases} -1, \; x < -1, \\ +1, \; x > 1 \\ x, \; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



- Tangente hiperbólica:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



Erro ao usar função aproximada

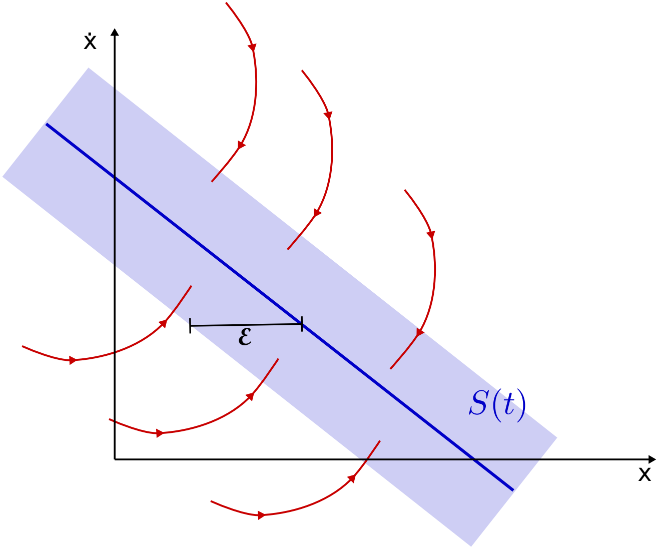
No caso de se usar uma função aproximada, então, para $n = 2$, tem-se um erro ϕ de convergência para a superfície de deslizamento, isto é, $|s(\mathbf{x},t)| \leq \phi > 0$. Nesse caso, a dinâmica do erro convergirá para uma vizinhança da superfície, delimitada por:

$$\left| \frac{d}{dt}\tilde{x} + \lambda\tilde{x} \right| = |s| \leq \phi$$

$$|\tilde{x}(t)| \leq \underbrace{e^{-\lambda t}|\tilde{x}(0)|}_{\to 0} + \frac{\phi}{\lambda}\underbrace{(1 - e^{-\lambda t})}_{\to 1} \to \frac{\phi}{\lambda} = \varepsilon.$$

De maneira geral, pode-se mostrar para qualquer ordem n que:

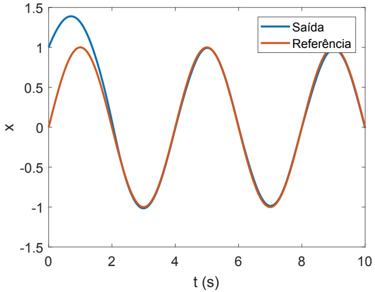
$$\varepsilon = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}.$$

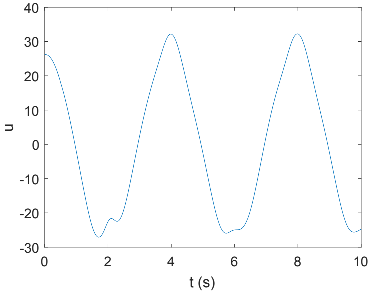

ẋ
x
ε
S(t)

Usando a função $\text{sat}\left(\frac{s}{\phi}\right)$ no lugar de $\text{sgn}(s)$ no exemplo

$$u = \ddot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} + 1{,}5\dot{x}^2\cos(3x) - 0{,}5\dot{x}^2|\cos(3x)|\,\text{sat}\left(\frac{\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}}{\phi}\right) + \eta\,\text{sat}\left(\frac{\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}}{\phi}\right)$$

Os resultados de simulação para $\lambda = 2$ e $\eta = 3$, com $a(t) = 1 + |\text{sen}(t)|$ são mostrados a seguir para $x_d(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ e $\mathbf{x}(0)^T = [1 \;\; 1]$, usando $\phi = 0{,}5$:





Nota-se que houve apenas uma pequena perda de desempenho, porém com um sinal de controle muito mais suave.