Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 13 - Estabilidade de sistemas não autônomos [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

18 de outubro de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 4, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Motivação

Pergunta

É possível usar as mesmas técnicas para analisar a estabilidade que foram desenvolvidas para sistemas autônomos?

Seja o sistema linear dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

os autovalores da matriz $A(t)$ são as raízes de:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -e^{2t} \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \tag{2}$$

ambos com parte real negativa. Aplicando os critérios de estabilidade vistos para sistemas autônomos, resultaria que o sistema é estável.

Avaliando as equações diferenciais (1):

$$\dot{x}_2 = -x_2 \Rightarrow x_2(t) = x_2(0)e^{-t}$$

e

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = -x_1 + e^{2t}x_2 = -x_1 + x_2(0)e^{t} \\
&\dot{x}_1 + x_1 = x_2(0)e^{t} \\
&e^{t}\dot{x}_1 + e^{t}x_1 = x_2(0)e^{2t} \\
&\frac{d}{dt}(e^{t}x_1) = x_2(0)e^{2t} \\
&\int_0^{\tau} \frac{d}{dt}(e^{t}x_1)dt = \int_0^{\tau} x_2(0)e^{2t}dt \\
&e^{\tau}x_1(\tau) - x_1(0) = \frac{x_2(0)}{2}(e^{2\tau} - 1) \\
&x_1(\tau) = x_1(0)e^{-\tau} + \frac{x_2(0)}{2}({\color{red}e^{\tau}} - e^{-\tau}).
\end{aligned}$$

Devido ao termo em destaque, $x_1(t)$ diverge, provando que **não é estável**.

Conclusão

Resposta

Não é possível usar as técnicas de análise de estabilidade para sistemas autônomos para concluir sobre a estabilidade de sistemas não autônomos, mesmo no caso de sistemas lineares.

Necessário reformular os critérios para avaliação de estabilidade para o sistema dinâmico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{3}$$

com a origem como ponto de equilíbrio (PE).

Definições preliminares

Na reformulação, será necessário que se inicie pelas definições de ponto de equilíbrio e estabilidade para sistemas não autônomos.

Definição 1 (Ponto de Equilíbrio – PE).

Seja o sistema não linear não autônomo (3) com vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, diz-se que $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de equilíbrio (PE) de (3) se:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},t) = 0, \ \forall t \geq t_0.$$

Definição 2 (Estabilidade local no sentido de Lyapunov).

A origem é estável em t_0 se:

$$\forall R > 0,\ \exists r(R,t_0) > 0 \mid \ \|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R,\ \forall t > t_0.$$

Definição 3 (Estabilidade assintótica).

A origem é assintoticamente estável se

- é estável;
- $\exists r(t_0) > 0 \mid \|\mathbf{x}(t_0)\| < r(t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$

Definição 4 (Estabilidade exponencial).

A origem é exponencialmente estável se, além de assintoticamente estável, $\exists\alpha,\ \lambda > 0$ tais que, para $x(t_0)$ suficientemente pequeno

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\lambda t},\ \forall t > t_0.$$

Definição 5 (Estabilidade assintótica global).

A origem é globalmente assintoticamente estável se $\forall \mathbf{x}(t_0), \|\mathbf{x}(t)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemplo

O sistema

$$\dot{x}(t) = -\frac{x}{1+\mathrm{sen}^2(x)}$$

é tal que

$$\int_{\tau=t_0}^{t} x(\tau)\frac{dx}{d\tau}d\tau = \int_{\tau=t_0}^{t} -\frac{1}{1+\mathrm{sen}^2[x(\tau)]}d\tau$$

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{\tau=t_0}^{t} -\frac{1}{1+\mathrm{sen}^2[x(\tau)]}d\tau$$

$$\ln\frac{x(t)}{x(t_0)} = \int_{\tau=t_0}^{t} -\frac{1}{1+\mathrm{sen}^2[x(\tau)]}d\tau$$

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{\tau=t_0}^{t}\frac{1}{1+\mathrm{sen}^2[x(\tau)]}d\tau}$$

Como $1+\mathrm{sen}^2(x) \leq 2$:

$$-\int_{\tau=t_0}^{t}\frac{1}{1+\mathrm{sen}^2[x(\tau)]}d\tau \leq -\frac{1}{2}\int_{\tau=t_0}^{t}d\tau = -\frac{t-t_0}{2}$$

$$-\int_{\tau=t_0}^{t} \frac{1}{1+\text{sen}^2[x(\tau)]} d\tau \leq -\frac{1}{2}\int_{\tau=t_0}^{t} d\tau = -\frac{t-t_0}{2}$$

Donde

$$x(t) \leq x(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{2}}.$$

Nesse caso, pela Def. 4, com $\alpha = e^{\frac{t_0}{2}}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, conclui-se que o sistema é exponencialmente estável.

Dependência do tempo

As definições 1, 2, 7, 4 e 5 contém o instante t_0. Para operar um sistema continuamente, pode ser interessante contar com definições que não dependam de um "instante inicial" específico.

Definição 6 (Estabilidade uniforme).

A origem é uniformemente estável se o escalar r na Def. 2 puder ser escolhido independentemente de t_0. isto é, $r = r(R)$.

Definição 7 (Estabilidade assintótica uniforme).

A origem é localmente uniformemente assintoticamente estável se

- é uniformemente estável;
- $\exists \mathcal{B}_{R_0}$ [a], com R_0 independente de t_0, tal que $\|\mathbf{x}(t_0)\| \in \mathcal{B}_{R_0} \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\|$ converge uniformemente [b] para 0.

---

[a] Relembrando: $\mathcal{B}_{R_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x}\| < R_0\}$

[b] Convergir uniformemente em t_0 significa que $\forall R_1, R_2, \; 0 < R_2 < R_2 \leq R_0, \; \exists T(R_1,R_2) \mid \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq R_1 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq R_2, \; \forall t \geq t_0 + T(R_1,R_2)$, i. e., a trajetória iniciada em $\mathcal{B}_{R_1}$ entra em $\mathcal{B}_{R_2}$ após um intervalo de tempo T, **independentemente** de t_0.

Funções positivo definidas e crescentes

Definição 8 (Função localmente positivo definida variante no tempo).

Uma função escalar variante no tempo $V(\mathbf{x},t)$ é **localmente positivo definida** (PD) se $V(0,t)=0$ e existe uma função positivo definida $V_0(\mathbf{x})$ invariante no tempo tal que $\forall t \geq t_0$, $V(\mathbf{x},t) \geq V_0(\mathbf{x})$ [a] [b] [c].

[a] V é negativo definida (ND) se $-V$ é PD
[b] V é positivo semidefinida (PSD) se V_0 é apenas PSD na definição 8
[c] V é negativo semidefinida (NSD) se $-V$ é PSD

Definição 9 (Função decrescente).

Uma função escalar variante no tempo $V(\mathbf{x},t)$ é **decrescente** se $V(0,t) = 0$ e existe uma função PD $V_1(\mathbf{x})$ invariante no tempo tal que $\forall t \geq t_0$, $V(\mathbf{x},t) \leq V_1(\mathbf{x})$.

Exemplo

$$V(\mathbf{x},t) = [1 + \mathrm{sen}^2(t)](x_1^2 + x_2^2), \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

é

- localmente PD, pois $V(0,t) = 0$ e $V(\mathbf{x},t) \geq x_1^2 + x_2^2 = V_0(\mathbf{x}),\ \forall t$;
- decrescente, pois $V(0,t) = 0$ e $V(\mathbf{x},t) \leq 2(x_1^2 + x_2^2) = V_1(\mathbf{x}),\ \forall t$.

Estabilidade de sistemas não autônomos

Teorema 1 (Teorema de Lyapunov para estabilidade de sistemas não autônomos).

Se em uma bola $\mathcal{B}_{R_0}$ existe uma função escalar $V(\mathbf{x},t)$, com derivadas parciais contínuas, tal que

1) *V é PD,*
2) *$\dot{V}$ [a] é NSD,*

então a origem é PE estável de (3) *no sentido de Lyapunov.*

---

[a] $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},t)$

Teorema 2 (Teorema de Lyapunov para estabilidade uniforme de sistemas não autônomos).

Se a origem é PE estável de (3) *e*

3) V *é decrescente,*

então a origem é PE ***uniformemente*** *estável de* (3).

Teorema 3 (Teorema de Lyapunov para estabilidade uniforme assintótica de sistemas não autônomos).

Se a origem é PE uniformemente estável de (3) *e*

4) $\dot{V}$ *é ND,*

então a origem é PE uniformemente ***assintoticamente*** *estável de* (3).

Teorema 4 (Teorema de Lyapunov para estabilidade uniforme assintótica global de sistemas não autônomos).

Se a origem é PE uniformemente assintoticamente estável de (3) *e a bola* $\mathcal{B}_{R_0}$ *é substituída pelo* $\mathbb{R}^n$

5) $V(\mathbf{x},t)$ *é radialmente ilimitada (RI),*

então a origem é PE globalmente uniformemente assintoticamente estável de (3).

Exemplo

Sejam o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 - e^{-2t} x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2
\end{aligned}
$$

e a função

$$V(\mathbf{x},t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t}) x_2^2$$

1) $V(\mathbf{x},t)$ é PD, pois

$$
\begin{aligned}
&V(0,t) = 0 \\
&V(\mathbf{x},t) \geq x_1^2 + x_2^2 = V_0(\mathbf{x}), \ \forall t
\end{aligned}
$$

2) $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é ND, pois

$$\begin{aligned}\dot{V} =& 2x_1\dot{x}_1 + 2(1+e^{-2t})x_2\dot{x}_2 - 2e^{-2t}x_2^2 \\ & -2x_1^2 - \cancel{2x_1x_2e^{-2t}} + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + \cancel{2e^{-2t}x_1x_2} - 2e^{-2t}x_2^2 - 2e^{-2t}x_2^2 \\ & -(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4e^{-2t}x_2^2),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}-\dot{V} =& 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4e^{-2t}x_2^2 = (x_1-x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 4e^{-2t}x_2^2 \\ & \geq (x_1-x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \rightarrow PD, \\ & \dot{V}(0,t) = 0\end{aligned}$$

isto é, $-\dot{V}$ é PD $\implies$ $\dot{V}$ é ND.
Finalmente, é trivial ver que

$$\dot{V}(0,t) = 0.$$

3) $V(\mathbf{x},t)$ é decrescente, pois

$$
\begin{aligned}
&V(0,t) = 0\\
&V(\mathbf{x},t) \leq x_1^2 + 2x_2^2 = \underbrace{V_1(\mathbf{x})}_{PD},\ \forall t \geq t_0 = 0
\end{aligned}
$$

4) $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ é RI

Aplicando o Teorema 4, conclui-se que a origem é PE globalmente uniformemente assintoticamente estável do sistema neste exemplo.

Convergência assintótica no caso geral

Para sistemas autônomos, mesmo quando $\dot{V}$ era apenas NSD, em alguns casos, ainda poder-se-ia lançar mão do Teorema de Conjuntos Invariantes de LaSalle para demonstrar a convergência assintótica para o maior conjunto invariante $\mathcal{M}$ sob a dinâmica do sistema contido na região $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$.
Por outro lado, no caso de sistemas não autônomos, para garantir a convergência uniforme, necessita-se de premissas adicionais.

Convergência assintótica de funções e suas derivadas

Seja uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, verifiquemos a veracidade de algumas conjecturas.

Conjectura 1

$\dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f$ converge.

Convergência assintótica de funções e suas derivadas

Seja uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, verifiquemos a veracidade de algumas conjecturas.

Conjectura 1

$\dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f$ converge.

$$f(t) = \text{sen}(\ln t),$$

$$\dot{f}(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \not\Rightarrow \text{sen}(\ln t) \text{ converge.}$$

Convergência assintótica de funções e suas derivadas

Seja uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, verifiquemos a veracidade de algumas conjecturas.

Conjectura 1

$\dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow f$ converge.

$$f(t) = \operatorname{sen}(\ln t),$$
$$\dot{f}(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \not\Rightarrow \operatorname{sen}(\ln t) \text{ converge.}$$

A Conjectura 1 é falsa!

Conjectura 2

$f(t)$ converge $\Rightarrow \dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Conjectura 2

$f(t)$ converge $\Rightarrow \dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

$$f(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\dot{f}(t) = -e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) + 2e^{-t}e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right) = -e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) + \underbrace{2e^{t}\cos\left(e^{2t}\right)}_{\text{não converge (ilimitada)}},$$

$f(t)$ converge $\not\Rightarrow \dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Conjectura 2

$f(t)$ converge $\Rightarrow \dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

$$f(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\dot{f}(t) = -e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) + 2e^{-t}e^{2t}\cos\left(e^{2t}\right) = -e^{-t}\,\mathrm{sen}(e^{2t}) + \underbrace{2e^{t}\cos\left(e^{2t}\right)}_{\text{não converge (ilimitada)}},$$

$f(t)$ converge $\not\Rightarrow \dot{f}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

A Conjectura 2 é falsa!

Teorema 5 (Convergência de função limitada e monótona).

Se $f(t)$ é limitada inferiormente por m, isto é,

$$f(t) \geq m$$

e

$$\dot{f}(t) \leq 0,$$

então f converge.

Demonstração.

Da definição de derivada

$$\dot{f}(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leq 0.$$

Usando $t_2 \to t_1^+$ e multiplicando todos os termos por $t_2 - t_1$:

$$\dot{f}(t) = \lim_{t_2 \to t_1^+} f(t_2) - f(t_1) \leq 0 \implies f(t_2) \leq f(t_1),\ t_2 > t_1 \tag{4}$$

Por outro lado, usando $t_2 \to t_1^-$ e multiplicando todos os termos por $t_2 - t_1$:

$$\dot{f}(t) = \lim_{t_2 \to t_1^-} f(t_2) - f(t_1) \geq 0 \implies f(t_2) \geq f(t_1),\ t_2 < t_1 \tag{5}$$

□

Demonstração.

De (4) e (5), conclui-se que:

$$f(t_2) \leq f(t_1),\ t_2 > t_1 \tag{6}$$

Neste caso, a função também é chamada **decrescente**, mas no sentido de ser monótona, não de ser majorada por uma outra função com menos argumentos.
Como o conjunto $\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \varnothing$ e é limitado inferiormente, admite ínfimo L, donde pode-se estabelecer o seguinte, para um dado t_a:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \mid L \leq f(t_a) < L + \varepsilon. \tag{7}$$

Por outro lado, como f é decrescente:

$$\forall t \in]t_a, \infty[:\ L - \varepsilon < L \leq f(t) \leq f(t_a) < L + \varepsilon. \tag{8}$$

$\square$

Demonstração.

$$\forall t \in]t_a, \infty[\, : \; L - \varepsilon < L \leq f(t) \leq f(t_a) < L + \varepsilon,$$

donde

$$L - \varepsilon < f(t_a) < L + \varepsilon. \tag{9}$$

Assim,

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists t_a > 0 \mid t > t_a \implies |f(t) - L| < \varepsilon. \tag{10}$$

□

Mas nada se pode dizer de $\dot{f}(t)$.

O Lema de Barbalat

Lema 1 (Lema de Barbalat).

Se $\lim_{t\to\infty} f(t)$ *é finito e* $\dot{f}(t)$ *é uniformemente contínua, então* $\lim_{t\to\infty} \dot{f}(t) = 0$ [a].

---

[a] A chave está na continuidade uniforme de $\dot{f}(t) = g(t)$, definida por $\forall R > 0,\ \exists \eta(R) > 0,\ \forall t_1 \geq 0,\ \forall t \geq 0 \mid\ |t - t_1| < \eta \implies |g(t) - g(t_1)| < R$. Continuidade é dita **uniforme** porque η não depende de t_1.

Teste para continuidade uniforme

Um teste prático para determinar se $g(t)$ é uniformemente contínua é verificar se $\dot{g}(t)$ é limitada. Pelo Teorema do Valor Médio:

$$\forall t, t_1,\ t > t_1,\ \exists t_2 \in [t_1, t] \text{ tal que } \frac{g(t) - g(t_1)}{t - t_1} = \dot{g}(t_2).$$

Se $|\dot{g}(t)|$ for limitado por $R_1 > 0$, isto é,

$$|\dot{g}(t)| \leq R_1,$$

então

$$|g(t) - g(t_1)| = |t - t_1||\dot{g}(t_2)| \leq |t - t_1| R_1.$$

Assim, escolhendo

$$\eta(R) = \frac{R}{R_1} \text{ independente de } t_1,$$

tal que

$$|t - t_1| < \eta(R) = \frac{R}{R_1} \implies R_1|t - t_1| < R,$$

então

$$|g(t) - g(t_1)| = |t - t_1||\dot{g}(t_2)| \leq |t - t_1|R_1 < R,$$

isto é, $g(t)$ é uniformemente contínua.

Aplicando o Lema de Barbalat

Lema 2 (Lyapunov-like analysis).

Se uma função escalar V satisfaz

i. $V(\mathbf{x},t)$ *é limitada inferiormente,*

ii. $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ *é NSD,*

iii. $\dot{V}(\mathbf{x},t)$ *é uniformemente contínua em t,*

então $\dot{V}(\mathbf{x},t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Note que as condições i e ii do Lema 2 acima impõem que a função V é limitada inferiormente e que sua derivada $\dot{V} \leq 0$, exatamente as condições do Teorema 5 para demonstrar que iv V converge. Finalmente, utilizando iii e iv, pode-se aplicar o Lema de Barbalat (Lema 1) para concluir que $\dot{V}(\mathbf{x},t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.