Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 14 - Controle adaptativo com modelo de referência [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

18 de outubro de 2017

[1] Astrom e Wittenmark, *Adaptive Control*, 2nd Ed., Dover, 2008

Introdução

Por quê?

- Muitas vezes conhecemos a estrutura do modelo da planta, mas não sabemos o valor de (alguns de) seus parâmetros.
- Possíveis motivos:
  - Parâmetro desconhecido.
  - Parâmetro varia com o tempo, e.g, carga que um braço robótico deve transportar.
  - Parâmetros relacionados à faixa de operação da planta: parâmetros de aeronaves dependem de altitude, velocidade, etc.

Introdução

Por quê?

- Muitas vezes conhecemos a estrutura do modelo da planta, mas não sabemos o valor de (alguns de) seus parâmetros.
- Possíveis motivos:
  - Parâmetro desconhecido.
  - Parâmetro varia com o tempo, e.g, carga que um braço robótico deve transportar.
  - Parâmetros relacionados à faixa de operação da planta: parâmetros de aeronaves dependem de altitude, velocidade, etc.

Introdução

Por quê?

- Muitas vezes conhecemos a estrutura do modelo da planta, mas não sabemos o valor de (alguns de) seus parâmetros.
- Possíveis motivos:
  - Parâmetro desconhecido.
  - Parâmetro varia com o tempo, e.g, carga que um braço robótico deve transportar.
  - Parâmetros relacionados à faixa de operação da planta: parâmetros de aeronaves dependem de altitude, velocidade, etc.

Introdução

Por quê?

- Muitas vezes conhecemos a estrutura do modelo da planta, mas não sabemos o valor de (alguns de) seus parâmetros.
- Possíveis motivos:
  - Parâmetro desconhecido.
  - Parâmetro varia com o tempo, e.g, carga que um braço robótico deve transportar.
  - Parâmetros relacionados à faixa de operação da planta: parâmetros de aeronaves dependem de altitude, velocidade, etc.

Introdução

Por quê?

- Muitas vezes conhecemos a estrutura do modelo da planta, mas não sabemos o valor de (alguns de) seus parâmetros.
- Possíveis motivos:
  - Parâmetro desconhecido.
  - Parâmetro varia com o tempo, e.g, carga que um braço robótico deve transportar.
  - Parâmetros relacionados à faixa de operação da planta: parâmetros de aeronaves dependem de altitude, velocidade, etc.

Introdução

Como realizar o controle nessa situação?

- Controle robusto: manter estabilidade/desempenho para parâmetros variando dentro de intervalos conhecidos a priori.
- Controle adaptativo: estimar parâmetro e alterar o controlador de acordo.
  - Vantagens:
    1. Parâmetros podem assumir quaisquer valores (não requer conhecer faixa).
    2. Desempenho tende a melhorar conforme estimativa dos parâmetros melhora.

Introdução

Como realizar o controle nessa situação?

- Controle robusto: manter estabilidade/desempenho para parâmetros variando dentro de intervalos conhecidos a priori.
- Controle adaptativo: estimar parâmetro e alterar o controlador de acordo.
  - Vantagens:
    1. Parâmetros podem assumir quaisquer valores (não requer conhecer faixa).
    2. Desempenho tende a melhorar conforme estimativa dos parâmetros melhora.

Introdução

Como realizar o controle nessa situação?

- Controle robusto: manter estabilidade/desempenho para parâmetros variando dentro de intervalos conhecidos a priori.
- Controle adaptativo: estimar parâmetro e alterar o controlador de acordo.
  - Vantagens:
    1. Parâmetros podem assumir quaisquer valores (não requer conhecer faixa).
    2. Desempenho tende a melhorar conforme estimativa dos parâmetros melhora.

Introdução

Como realizar o controle nessa situação?

- Controle robusto: manter estabilidade/desempenho para parâmetros variando dentro de intervalos conhecidos a priori.
- Controle adaptativo: estimar parâmetro e alterar o controlador de acordo.
  - Vantagens:
    1. Parâmetros podem assumir quaisquer valores (não requer conhecer faixa).
    2. Desempenho tende a melhorar conforme estimativa dos parâmetros melhora.

Introdução

Como realizar o controle nessa situação?

- Controle robusto: manter estabilidade/desempenho para parâmetros variando dentro de intervalos conhecidos a priori.
- Controle adaptativo: estimar parâmetro e alterar o controlador de acordo.
  - Vantagens:
    1. Parâmetros podem assumir quaisquer valores (não requer conhecer faixa).
    2. Desempenho tende a melhorar conforme estimativa dos parâmetros melhora.

Um exemplo

Ganho da planta desconhecido

- Tem-se uma planta em malha aberta com função de transferência dada por $kG(s)$, em que $G(s)$ é conhecida, mas k é desconhecido.
- Deseja-se que a planta se comporte como $k_0G(s)$, com k_0 preestabelecido.
- Para isso, pode-se usar um ganho θ em cascata, como na Figura.

Um exemplo

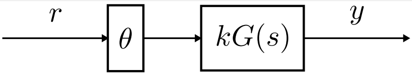
Ganho da planta desconhecido

- Tem-se uma planta em malha aberta com função de transferência dada por $kG(s)$, em que $G(s)$ é conhecida, mas k é desconhecido.
- Deseja-se que a planta se comporte como $k_0G(s)$, com k_0 preestabelecido.
- Para isso, pode-se usar um ganho θ em cascata, como na Figura.

Um exemplo

Ganho da planta desconhecido

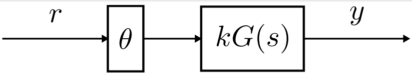
- Tem-se uma planta em malha aberta com função de transferência dada por $kG(s)$, em que $G(s)$ é conhecida, mas k é desconhecido.
- Deseja-se que a planta se comporte como $k_0G(s)$, com k_0 preestabelecido.
- Para isso, pode-se usar um ganho θ em cascata, como na Figura.



Um exemplo

Parâmetro do controlador depende do ganho desconhecido

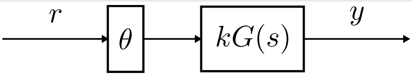
- Caso conhecêssemos k, bastaria fazer $\theta = k_0/k$.
- Com k desconhecido, vamos estimar θ.
- Para isso, vamos usar a estrutura da Figura (válida para o caso geral, no caso deste exemplo, a malha de realimentação de y para o controlador não existe).



Um exemplo

Parâmetro do controlador depende do ganho desconhecido

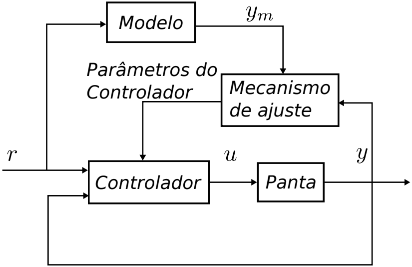
- Caso conhecêssemos k, bastaria fazer $\theta = k_0/k$.
- Com k desconhecido, vamos estimar θ.
- Para isso, vamos usar a estrutura da Figura (válida para o caso geral, no caso deste exemplo, a malha de realimentação de y para o controlador não existe).



Um exemplo

Parâmetro do controlador depende do ganho desconhecido

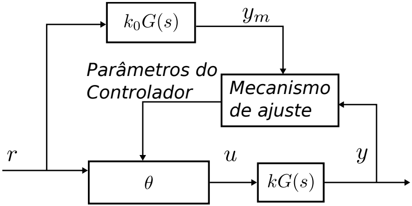
- Caso conhecêssemos k, bastaria fazer $\theta = k_0/k$.
- Com k desconhecido, vamos estimar θ.
- Para isso, vamos usar a estrutura da Figura (válida para o caso geral, no caso deste exemplo, a malha de realimentação de y para o controlador não existe).



Um exemplo

Modelo de comportamento desejado

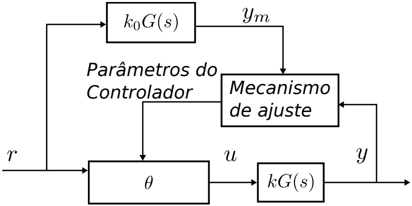
- Nesse caso, o modelo desejado é $k_0G(s)$.
- E o controlador é simplesmente o ganho θ (o próprio parâmetro a ser adaptado).
- Resta determinar o mecanismo de ajuste. Como?



Um exemplo

Modelo de comportamento desejado

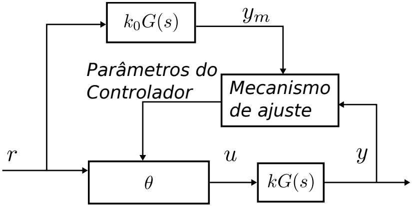
- Nesse caso, o modelo desejado é $k_0G(s)$.
- E o controlador é simplesmente o ganho θ (o próprio parâmetro a ser adaptado).
- Resta determinar o mecanismo de ajuste. Como?



Um exemplo

Modelo de comportamento desejado

- Nesse caso, o modelo desejado é $k_0G(s)$.
- E o controlador é simplesmente o ganho θ (o próprio parâmetro a ser adaptado).
- Resta determinar o mecanismo de ajuste. Como?



Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}, \gamma > 0, \tag{1}$$

  isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.
- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}, \ \gamma > 0, \tag{1}$$

  isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.
- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial \theta}, \gamma > 0, \qquad (1)$$

  isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.
- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}, \; \gamma > 0, \tag{1}$$

isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.

- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta},\ \gamma > 0, \tag{1}$$

  isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.
- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Seja o erro de rastreio $e = y - y_m$.
- Defina uma função $J(\theta) \propto |e|$ que é diretamente proporcional ao erro de rastreio.
- Minimizar $J(\theta) \Rightarrow$ minimizar $|e|$.
- Variação do parâmetro:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}, \; \gamma > 0, \tag{1}$$

  isto é, θ varia com sinal oposto ao de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.
- Com isso, θ varia na direção oposta à de maior crescimento de $J(\theta)$.
- Regra desenvolvida no *Instrumentation Laboratory* (atualmente *Draper Laboratory*) do MIT.

Um exemplo

Regra do MIT

- Possíveis valores de $J(\theta)$:
  - $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - $J(\theta) = |e| \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma sgn(e)\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - entre outros...

Um exemplo

Regra do MIT

- Possíveis valores de $J(\theta)$:
  - $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - $J(\theta) = |e| \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma sgn(e)\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - entre outros...

Um exemplo

Regra do MIT

- Possíveis valores de $J(\theta)$:
  - $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - $J(\theta) = |e| \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma sgn(e)\frac{\partial e}{\partial\theta}$
  - entre outros...

Um exemplo

Regra do MIT para o nosso exemplo

- Erro de rastreio $e = y - y_m = kG(s)\theta r - k_0 G(s) r$. [a]
- Escolhendo $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta} = -\gamma ekG(s)r = -\gamma e\frac{k}{k_0}y_m = -\gamma' e y_m. \quad (2)$$

- Desde que se conheça o sinal de k, o termo γ' terá sinal conhecido (γ é arbitrado). Então, podemos arbitrar diretamente γ', eliminando a dependência no parâmetro desconhecido k e mantendo a direção de crescimento de θ oposta à de $\frac{\partial J}{\partial\theta}$.

[a] Mistura de notação entre domínio da frequência e do tempo

Um exemplo

Regra do MIT para o nosso exemplo

- Erro de rastreio $e = y - y_m = kG(s)\theta r - k_0 G(s) r$. [a]
- Escolhendo $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e k G(s) r = -\gamma e \frac{k}{k_0} y_m = -\gamma' e y_m. \quad (2)$$

- Desde que se conheça o sinal de k, o termo γ' terá sinal conhecido (γ é arbitrado). Então, podemos arbitrar diretamente γ', eliminando a dependência no parâmetro desconhecido k e mantendo a direção de crescimento de θ oposta à de $\frac{\partial J}{\partial \theta}$.

[a] Mistura de notação entre domínio da frequência e do tempo

Um exemplo

Regra do MIT para o nosso exemplo

- Erro de rastreio $e = y - y_m = kG(s)\theta r - k_0 G(s) r$. [a]
- Escolhendo $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta} = -\gamma ekG(s)r = -\gamma e\frac{k}{k_0}y_m = -\gamma' e y_m. \quad (2)$$

- Desde que se conheça o sinal de k, o termo γ' terá sinal conhecido (γ é arbitrado). Então, podemos arbitrar diretamente γ', eliminando a dependência no parâmetro desconhecido k e mantendo a direção de crescimento de θ oposta à de $\frac{\partial J}{\partial\theta}$.

[a] Mistura de notação entre domínio da frequência e do tempo

Um exemplo

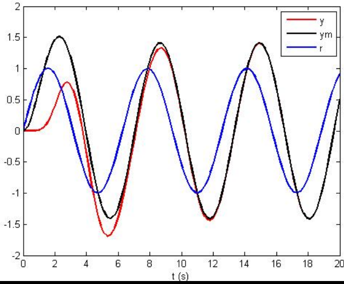
Exemplo numérico

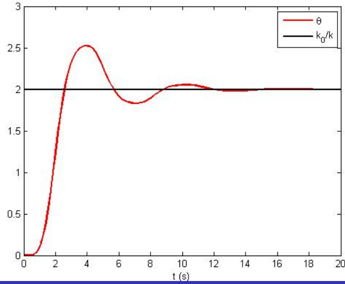
- Vamos assumir
  - $G(s) = 1/(s+1)$ dinâmica conhecida;
  - $k = 1$ desconhecido (usado apenas na simulação);
  - $k_0 = 2$ desejado;
  - $\gamma' = 1$ (ganho de adaptação);
  - $r = \mathrm{sen}(t)$ referência;
  - $\theta(0) = 0$ valor inicial de θ;

Um exemplo

Exemplo numérico

- Vamos assumir
  - $G(s) = 1/(s+1)$ dinâmica conhecida;
  - $k = 1$ desconhecido (usado apenas na simulação);
  - $k_0 = 2$ desejado;
  - $\gamma' = 1$ (ganho de adaptação);
  - $r = \mathrm{sen}(t)$ referência;
  - $\theta(0) = 0$ valor inicial de θ;





Convergência da estimativa do parâmetro

Mesmo exemplo, outra dinâmica

- Assumindo $G(s) = 1$ para o mesmo exemplo;
- Erro de rastreio $e = y - y_m = k\theta r - k_0 r = k(\theta - \theta^0)r$, em que $\theta^0 = k_0/k$.
- $$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e k r = -\gamma k^2 r^2 (\theta - \theta^0). \tag{3}$$
- Solução:
$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0] e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{4}$$
com
$$I_t = \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Convergência da estimativa do parâmetro

Mesmo exemplo, outra dinâmica

- Assumindo $G(s) = 1$ para o mesmo exemplo;
- Erro de rastreio $e = y - y_m = k\theta r - k_0 r = k(\theta - \theta^0)r$, em que $\theta^0 = k_0/k$.
- $$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e k r = -\gamma k^2 r^2 (\theta - \theta^0). \tag{3}$$
- Solução:
  $$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0] e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{4}$$
  com
  $$I_t = \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Convergência da estimativa do parâmetro

Mesmo exemplo, outra dinâmica

- Assumindo $G(s) = 1$ para o mesmo exemplo;
- Erro de rastreio $e = y - y_m = k\theta r - k_0 r = k(\theta - \theta^0)r$, em que $\theta^0 = k_0/k$.
- $$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e k r = -\gamma k^2 r^2 (\theta - \theta^0). \tag{3}$$
- Solução:
$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0] e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{4}$$
com
$$I_t = \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Convergência da estimativa do parâmetro

Mesmo exemplo, outra dinâmica

- Assumindo $G(s) = 1$ para o mesmo exemplo;
- Erro de rastreio $e = y - y_m = k\theta r - k_0 r = k(\theta - \theta^0)r$, em que $\theta^0 = k_0/k$.
- $$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e k r = -\gamma k^2 r^2 (\theta - \theta^0). \tag{3}$$
- Solução:
$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0] e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{4}$$
com
$$I_t = \int_0^t r^2(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Convergência da estimativa do parâmetro

Necessidade de "persistência" da excitação

- Solução:

$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0]e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{6}$$

com

$$I_t = \int_0^t r^2(\tau)d\tau. \tag{7}$$

- $\theta(t) \to \theta^0 \Leftrightarrow I_t \to \infty$, i.e., excitação r persistente.
- Mas o erro de rastreio $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$ de qualquer forma:
  - r é persistente, $\theta - \theta^0 \to 0$;
  - $r \to 0$, $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$.

Convergência da estimativa do parâmetro

Necessidade de "persistência" da excitação

- Solução:

$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0]e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{6}$$

com

$$I_t = \int_0^t r^2(\tau)d\tau. \tag{7}$$

- $\theta(t) \to \theta^0 \Leftrightarrow I_t \to \infty$, i.e., excitação r persistente.
- Mas o erro de rastreio $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$ de qualquer forma:
  - r é persistente, $\theta - \theta^0 \to 0$;
  - $r \to 0$, $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$.

Convergência da estimativa do parâmetro

Necessidade de "persistência" da excitação

- Solução:

$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0]e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{6}$$

com

$$I_t = \int_0^t r^2(\tau)d\tau. \tag{7}$$

- $\theta(t) \to \theta^0 \Leftrightarrow I_t \to \infty$, i.e., excitação r persistente.
- Mas o erro de rastreio $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$ de qualquer forma:
  - r é persistente, $\theta - \theta^0 \to 0$;
  - $r \to 0$, $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$.

Convergência da estimativa do parâmetro

Necessidade de "persistência" da excitação

- Solução:

$$\theta(t) = \theta^0 + [\theta(0) - \theta^0]e^{-\gamma k^2 I_t} \tag{6}$$

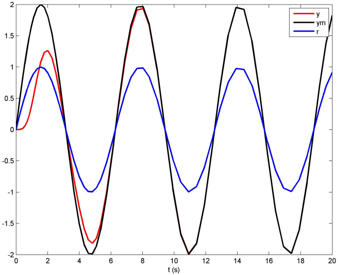
com

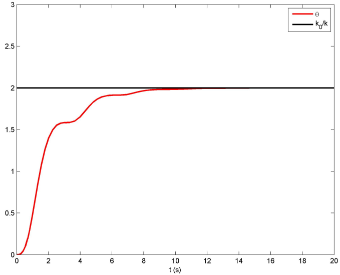
$$I_t = \int_0^t r^2(\tau)d\tau. \tag{7}$$

- $\theta(t) \to \theta^0 \Leftrightarrow I_t \to \infty$, i.e., excitação r persistente.
- Mas o erro de rastreio $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$ de qualquer forma:
  - r é persistente, $\theta - \theta^0 \to 0$;
  - $r \to 0$, $e = k(\theta - \theta^0)r \to 0$.

Convergência da estimativa do parâmetro

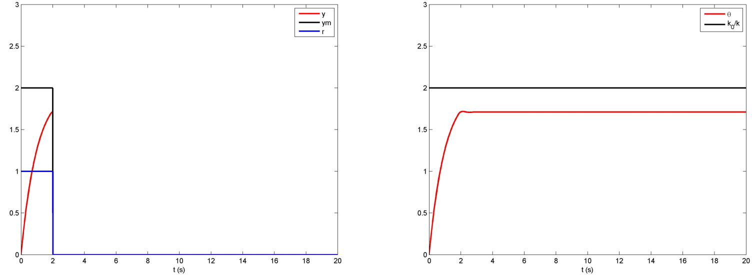
Excitação persistente





Convergência da estimativa do parâmetro

Excitação não persistente



Outras formas de obter mecanismo de adaptação

Baseado na teoria de Lyapunov

- Determinar erro de rastreio $e = y - y_m$ e $\dot{e}$.
- $\dot{e}$ contém os parâmetros a serem estimados.
- Propor função candidata de Lyapunov V para este sistema dinâmico.
- Caso $\dot{V} \leq 0$ (PSD), usar Lema de Barbalat (*Lyapunov-like analysis*).

Outras formas de obter mecanismo de adaptação

Baseado na teoria de Lyapunov

- Determinar erro de rastreio $e = y - y_m$ e $\dot{e}$.
- $\dot{e}$ contém os parâmetros a serem estimados.
- Propor função candidata de Lyapunov V para este sistema dinâmico.
- Caso $\dot{V} \leq 0$ (PSD), usar Lema de Barbalat (*Lyapunov-like analysis*).

Outras formas de obter mecanismo de adaptação

Baseado na teoria de Lyapunov

- Determinar erro de rastreio $e = y - y_m$ e $\dot{e}$.
- $\dot{e}$ contém os parâmetros a serem estimados.
- Propor função candidata de Lyapunov V para este sistema dinâmico.
- Caso $\dot{V} \leq 0$ (PSD), usar Lema de Barbalat (*Lyapunov-like analysis*).

Outras formas de obter mecanismo de adaptação

Baseado na teoria de Lyapunov

- Determinar erro de rastreio $e = y - y_m$ e $\dot{e}$.
- $\dot{e}$ contém os parâmetros a serem estimados.
- Propor função candidata de Lyapunov V para este sistema dinâmico.
- Caso $\dot{V} \leq 0$ (PSD), usar Lema de Barbalat (*Lyapunov-like analysis*).

Exemplo com teoria de Lyapunov

Sistema para exemplo

- Sistema $\dot{y} = -ay + bu$, a e b desconhecidos.
- Modelo desejado $\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r$.
- Controle $u = \theta_1 r - \theta_2 y$, θ_1 e θ_2 parâmetros do controlador.
- $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m = -ay + bu + a_m y_m - b_m r = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y + a_m y_m - b_m r = a_m y_m + (-a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r = -a_m e + (a_m - a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Sistema para exemplo

- Sistema $\dot{y} = -ay + bu$, a e b desconhecidos.
- Modelo desejado $\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r$.
- Controle $u = \theta_1 r - \theta_2 y$, θ_1 e θ_2 parâmetros do controlador.
- $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m = -ay + bu + a_m y_m - b_m r = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y + a_m y_m - b_m r = a_m y_m + (-a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r = -a_m e + (a_m - a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Sistema para exemplo

- Sistema $\dot{y} = -ay + bu$, a e b desconhecidos.
- Modelo desejado $\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r$.
- Controle $u = \theta_1 r - \theta_2 y$, θ_1 e θ_2 parâmetros do controlador.
- $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m = -ay + bu + a_m y_m - b_m r = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y + a_m y_m - b_m r = a_m y_m + (-a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r = -a_m e + (a_m - a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Sistema para exemplo

- Sistema $\dot{y} = -ay + bu$, a e b desconhecidos.
- Modelo desejado $\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r$.
- Controle $u = \theta_1 r - \theta_2 y$, θ_1 e θ_2 parâmetros do controlador.
- $\dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m = -ay + bu + a_m y_m - b_m r = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y + a_m y_m - b_m r = a_m y_m + (-a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r = -a_m e + (a_m - a - b\theta_2)y + (b\theta_1 - b_m)r$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- $$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)^2\right]. \tag{8}$$

- Assumindo que $b\gamma > 0$, V é limitada inferiormente por 0.
- A derivada de V é

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\dot{\theta}_1, \tag{9}$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \tag{10}$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- $$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)^2\right]. \tag{8}$$
- Assumindo que $b\gamma > 0$, V é limitada inferiormente por 0.
- A derivada de V é

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\dot{\theta}_1, \tag{9}$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \tag{10}$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- $$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)^2\right]. \tag{8}$$

- Assumindo que $b\gamma > 0$, V é limitada inferiormente por 0.
- A derivada de V é

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\dot{\theta}_1, \tag{9}$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \tag{10}$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- $$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)^2\right]. \quad (8)$$
- Assumindo que $b\gamma > 0$, V é limitada inferiormente por 0.
- A derivada de V é

$$\dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)\dot{\theta}_1, \quad (9)$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \quad (10)$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- A derivada de V é

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \quad (11)$$

- Escolhendo

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma r e \quad (12)$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma y e \quad (13)$$

tem-se

$$\dot{V} = -a_m e^2. \quad (14)$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- A derivada de V é

$$\dot{V} = -a_m e^2 + \frac{1}{\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\dot{\theta}_2 - \gamma e y) + \frac{1}{\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\dot{\theta}_1 + \gamma e r). \tag{11}$$

- Escolhendo

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma r e \tag{12}$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma y e \tag{13}$$

tem-se

$$\dot{V} = -a_m e^2. \tag{14}$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- A derivada

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0. \tag{15}$$

é NSD apenas.

- Então $V(t) \leq V(0) \Rightarrow V$ é limitada $\Rightarrow e$, θ_1 e θ_2 limitados. Se o modelo desejado for estável, $y = e + y_m$ será limitado também, em vista de e e y_m o serem.
- Calculando a segunda derivada

$$\ddot{V} = -a_m e \dot{e} = 2[a_m^2 e^2 + a_m(a_m - a - b\theta_2)ey + a_m(b\theta_1 - b_m)er]. \tag{16}$$

é limitada, pois e, θ_1, θ_2, y e r (escolhido) são limitados

- Pelo Lema de Barbalat, se $\ddot{V}$ for limitada, $\dot{V} \to 0 \Rightarrow e \to 0$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- A derivada

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0. \tag{15}$$

é NSD apenas.

- Então $V(t) \leq V(0) \Rightarrow V$ é limitada $\Rightarrow e$, θ_1 e θ_2 limitados. Se o modelo desejado for estável, $y = e + y_m$ será limitado também, em vista de e e y_m o serem.
- Calculando a segunda derivada

$$\ddot{V} = -a_m e\dot{e} = 2[a_m^2 e^2 + a_m(a_m - a - b\theta_2)ey + a_m(b\theta_1 - b_m)er]. \tag{16}$$

é limitada, pois e, θ_1, θ_2, y e r (escolhido) são limitados

- Pelo Lema de Barbalat, se $\ddot{V}$ for limitada, $\dot{V} \to 0 \Rightarrow e \to 0$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Lyapunov-like analysis

- A derivada

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0. \quad (15)$$

é NSD apenas.

- Então $V(t) \leq V(0) \Rightarrow V$ é limitada $\Rightarrow e$, θ_1 e θ_2 limitados. Se o modelo desejado for estável, $y = e + y_m$ será limitado também, em vista de e e y_m o serem.
- Calculando a segunda derivada

$$\ddot{V} = -a_m e\dot{e} = 2[a_m^2 e^2 + a_m(a_m - a - b\theta_2)ey + a_m(b\theta_1 - b_m)er]. \quad (16)$$

é limitada, pois e, θ_1, θ_2, y e r (escolhido) são limitados

- Pelo Lema de Barbalat, se $\ddot{V}$ for limitada, $\dot{V} \to 0 \Rightarrow e \to 0$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Cálculo dos parâmetros para rastreio perfeito

- Sistema teria rastreio perfeito se:

$$\dot{y} = -ay + bu = -ay + b\theta_1 r - b\theta_2 y = (-a - b\theta_2)y + b\theta_1 r \quad (17)$$

$$\dot{y}_m = -a_m y + b_m r = (-a - b\theta_2)y + b\theta_1 r \quad (18)$$

$$\theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \quad (19)$$

$$\theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} \quad (20)$$

Exemplo com teoria de Lyapunov

Exemplo numérico

- $G(s) = \frac{0,5}{s+1}$, i. e, $a = 1$ e $b = 0,5$.
- $G_m(s) = \frac{2}{s+2}$, i. e, $a_m = 2$ e $b_m = 2$.
- $\theta_1^0 = \frac{b_m}{b} = 4$ e $\theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} = 2$.
- $\gamma = 1$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Exemplo numérico

- $G(s) = \frac{0,5}{s+1}$, i. e, $a = 1$ e $b = 0,5$.
- $G_m(s) = \frac{2}{s+2}$, i. e, $a_m = 2$ e $b_m = 2$.
- $\theta_1^0 = \frac{b_m}{b} = 4$ e $\theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} = 2$.
- $\gamma = 1$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Exemplo numérico

- $G(s) = \frac{0,5}{s+1}$, i. e, $a = 1$ e $b = 0,5$.
- $G_m(s) = \frac{2}{s+2}$, i. e, $a_m = 2$ e $b_m = 2$.
- $\theta_1^0 = \frac{b_m}{b} = 4$ e $\theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} = 2$.
- $\gamma = 1$.

Exemplo com teoria de Lyapunov

Exemplo numérico

- $G(s) = \frac{0,5}{s+1}$, i. e, $a = 1$ e $b = 0,5$.
- $G_m(s) = \frac{2}{s+2}$, i. e, $a_m = 2$ e $b_m = 2$.
- $\theta_1^0 = \frac{b_m}{b} = 4$ e $\theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} = 2$.
- $\gamma = 1$.

Resultado de simulação