Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 15 - Estabilidade absoluta [1] [2]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

8 de novembro de 2017

[1] A. C. Faleiros & T. Yoneyama, *Teoria Matemática de Sistemas*, Arte e Ciência, 2002

[2] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 4, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Motivação

Seja o sistema linear dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu, \tag{1}$$

$$y = c^T\mathbf{x} + du, \tag{2}$$

$$u = -Ky, \tag{3}$$

o qual representa uma ampla gama de sistemas com realimentação negativa e referência nula. A sua função de transferência em malha aberta é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T(sI - A)^{-1}b + d. \tag{4}$$

Já em malha fechada, admitindo referência não nula:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}. \tag{5}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}.$$

Utilizando ferramentas de análise de estabilidade de sistemas lineares, como o critério de Routh, pode-se estabelecer a faixa de valores do ganho K para que o sistema seja estável: $K \in [K_*, K^*]$. Este é um resultado bastante poderoso para sistemas lineares e seria interessante contar com um resultado análogo para sistemas não lineares. Em particular, uma ampla gama de sistemas não lineares pode ser descrita por uma parte linear e uma parte não linear, como:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu, \tag{6}$$

$$y = c^T\mathbf{x} + du, \tag{7}$$

$$u = -f(y), \tag{8}$$

em que f é uma função não linear da saída.

Função pertencente a um setor

Definição 1.

Uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é dita pertencer ao setor $[k_1, k_2]$ se:

$$k_1 \leq \frac{f(y)}{y} \leq k_2 \tag{9}$$

Conjecturas sobre estabilidade

Conjectura 1 (de Aizerman)

Se o sistema (7) é estável com $u = -Ky$, $\forall K \in [K_*, K^*]$, então é estável para qualquer $f(y)$ no setor $[K_*, K^*]$.

Conjecturas sobre estabilidade

Conjectura 1 (de Aizerman)

Se o sistema (7) é estável com $u = -Ky$, $\forall K \in [K_*, K^*]$, então é estável para qualquer $f(y)$ no setor $[K_*, K^*]$.

Esta conjectura é falsa.

Conjectura 2 (de Kalman)

Se o sistema (7) é estável com $u = -Ky$, $\forall K \in [K_*, K^*]$, então é estável para qualquer $f(y)$ no setor $[K_*, K^*]$ com inclinações na faixa $[K_*, K^*]$, isto é:

$$K_* \leq \frac{f(y)}{y} \leq K^*$$

$$K_* \leq \frac{\frac{df(y)}{dy}}{y} \leq K^*$$

Conjectura 2 (de Kalman)

Se o sistema (7) é estável com $u = -Ky$, $\forall K \in [K_*, K^*]$, então é estável para qualquer $f(y)$ no setor $[K_*, K^*]$ com inclinações na faixa $[K_*, K^*]$, isto é:

$$K_* \leq \frac{f(y)}{y} \leq K^*$$

$$K_* \leq \frac{\frac{df(y)}{dy}}{y} \leq K^*$$

Esta conjectura é falsa.

Problema de L'ure-Postnikov

Dado K^*, verificar se (7) é estável para f pertencente ao setor $[0,K^*]$, assumindo A Hurwitz[3], (A,b) controlável e $1+K^*d>0$.

Solução

Tome

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x},\ P>0, P=P^T.$$

Derivando com respeito ao tempo:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} = (A\mathbf{x}+bu)^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x}+bu) \tag{10}$$

$$\mathbf{x}^T(A^T P + PA)\mathbf{x} + 2u\mathbf{x}^T Pb \tag{11}$$

[3] todos os autovalores com parte real negativa

Usando a equação de saída de (7):

$$c^T\mathbf{x}+du-y=0 \tag{12}$$

$$c^T\mathbf{x}u+du^2-yu=0 \tag{13}$$

$$K^*c^T\mathbf{x}u+K^*du^2-K^*yu=0 \tag{14}$$

$$K^*c^T\mathbf{x}u+K^*du^2-K^*yu+u^2-u^2=0 \tag{15}$$

$$K^*c^T\mathbf{x}u+(1+K^*d)u^2-(K^*y+u)u=0 \tag{16}$$

Subtraindo (16) de (11):

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} =&\mathbf{x}^T(A^TP+PA)\mathbf{x}+2u\mathbf{x}^TPb-K^*c^T\mathbf{x}u-(1+K^*d)u^2\\ &+(K^*y+u)u\\ =&\mathbf{x}^T(A^TP+PA)\mathbf{x}+2u\mathbf{x}^T(Pb-\frac{1}{2}K^*c)-(1+K^*d)u^2\\ &+(K^*y+u)u\end{aligned} \tag{17}$$

Lema de Kalman-Yakubovich

Lema 1 (Kalman-Yakubovich).

Sejam $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *e* $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *matrizes constantes e* $\varepsilon,\ \gamma > 0$*. Assuma* A *Hurwitz,* (A,b) *controlável e* $Q > 0$*. Então, existem* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $P > 0$ *e* $q \in \mathbb{R}^{n\times 1}$*, tais que:*

$$A^T P + PA = -qq^T - \varepsilon Q,$$
$$Pb - v = \gamma^{\frac{1}{2}} q,$$

se e somente se

$$\mathrm{Re}\left\{2v^T(j\omega I - A)^{-1} b + \gamma\right\} > 0,\ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Fazendo a associação:

$$Q \leftarrow Q \qquad A \leftarrow AP \leftarrow P$$
$$q \leftarrow q \qquad \varepsilon \leftarrow \varepsilon\gamma \leftarrow 1 + K^* d$$
$$b \leftarrow b \qquad v \leftarrow \frac{K^* c}{2}$$

existirão P e q tais que

$$A^T P + PA = -qq^T - \varepsilon Q,$$
$$Pb - \frac{K^* c}{2} = (1 + K^* d)^{\frac{1}{2}} q,$$

se e somente se:

$$\mathrm{Re}\left\{K^* c^T (j\omega I - A)^{-1} b + 1 + K^* d\right\} > 0, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}\left\{K^* c^T (j\omega I - A)^{-1} b + 1 + K^* d\right\} > 0,\ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1 + K^* \underbrace{\left[c^T (j\omega I - A)^{-1} b + d\right]}_{G(j\omega)}\right\} > 0,\ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Neste caso, (17) fica:

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= -\varepsilon \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - (q\mathbf{x})^T q\mathbf{x} + 2u\mathbf{x}^T (1 + K^* d)^{\frac{1}{2}} q - (1 + K^* d) u^2 \\ &\quad + (K^* y + u) u \\ &= \underbrace{-\varepsilon \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}}_{\leq 0} \underbrace{- [q\mathbf{x} + (1 + K^* d) u]^2}_{\leq 0} + \underbrace{(K^* y + u) u}_{M} \end{aligned} \tag{18}$$

Lembrando que $u = -f(y)$, reescreve-se:

$$M = -[K^* y - f(y)]f(y) \tag{19}$$

Por hipótese, f pertence ao setor $[0, K^*]$, donde

$$0 \leq \frac{f(y)}{y} \leq K^* \implies \begin{cases} y < 0, \; K^* y - f(y) \leq 0, \; f(y) \leq 0 \\ y > 0, \; K^* y - f(y) \geq 0, \; f(y) \geq 0 \end{cases} \implies M \leq 0$$

Assim (19) é composta pela soma de três parcelas ≤ 0, donde:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq 0$$

Dessa forma, aplicando o Segundo Método de Lyapunov, com a candidata V, conclui-se que a origem é PE estável de (7) se

$$\mathrm{Re}\left\{1 + K^* \left[c^T (j\omega I - A)^{-1} b + d\right]\right\} > 0, \; \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Generalizando para qualquer setor

Convém ressaltar que a particularização para o setor $[0, K^*]$ não faz com que se perca generalidade, pois qualquer f pertencente setor $[\alpha, \beta]$ para o sistema com função de transferência $G(s)$ podem ser transformados por

$$\hat{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)}$$

$$\hat{f}(y) = f(y) - \alpha y$$

com $\hat{f}$ pertencente ao setor $[0, \beta - \alpha]$

Critério do Círculo de Zames

Pode-se encarar a condição

$$\mathrm{Re}\left\{1+K^*\hat{G}(j\omega)\right\}>0,\ \forall\omega\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Re}\left\{1+(\beta-\alpha)\frac{G(j\omega)}{1+\alpha G(j\omega)}\right\}>0,\ \forall\omega\in\mathbb{R}, \tag{21}$$

como uma generalização do critério de Nyquist para sistemas não lineares da forma (7).
Separando $G(j\omega)$ em suas partes real e imaginária

$$G(j\omega)=U(j\omega)+jV(j\omega),\ U,V\in\mathbb{R},$$

pode-se reescrever (21).

Reescrevendo (21):

$$\operatorname{Re}\left\{1+(\beta-\alpha)\frac{G(j\omega)}{1+\alpha G(j\omega)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{1+(\beta-\alpha)\frac{U(j\omega)+jV(j\omega)}{1+\alpha U(j\omega)+j\alpha V(j\omega)}\right\} \tag{22}$$

$$=\operatorname{Re}\left\{1+(\beta-\alpha)\frac{\{U(j\omega)[1+\alpha U(j\omega)]+\alpha V^2(j\omega)\}+jV(j\omega)[1+\alpha U(j\omega)-\alpha U(j\omega)]}{[1+\alpha U(j\omega)]^2+[\alpha V(j\omega)]^2}\right\}. \tag{23}$$

$$1+(\alpha+\beta)U(j\omega)+\alpha\beta U^2(j\omega)+\alpha\beta V^2(j\omega)>0$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)U(j\omega)+U^2(j\omega)+V^2(j\omega)>0$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2}{4}+\left(U(j\omega)+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)^2+V^2(j\omega)>0$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{1}{4\beta^2}-\frac{1}{2\alpha\beta}+\left(U(j\omega)+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)^2+V^2(j\omega)>0$$

$$-\frac{1}{4\alpha^2}-\frac{1}{4\beta^2}+\frac{1}{2\alpha\beta}+\left(U(j\omega)+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)^2+V^2(j\omega)>0$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2}{4}+\left(U(j\omega)+\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}\right)^2+V^2(j\omega)>0$$

Que é a equação do complemento de um círculo no plano complexo centrado em $\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right],0\right)$ com raio $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right]$.