**Instituto Tecnológico de Aeronáutica**
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

# Aula 16 - Utilização intencional de não linearidades [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

8 de novembro de 2017

[1] Castrucci, P. & Curti, R. *Sistemas não-lineares*, Cap. 6, São Paulo: Edgard Blücher, 1981

# Motivação

- Sistemas podem ser intrinsecamente não lineares, demandando um tratamento mais sofisticado do ponto de vista de ferramental matemático para estabelecer propriedades como a estabilidade.
- Por outro lado, os comportamentos mais complexos causados pelas não linearidades podem ser desejáveis, por permitirem obter desempenho superior àquele obtido por leis de controle lineares.

Há diversas técnicas de projeto de controladores que exploram efeitos não lineares, entre as quais:

- Controle por modos deslizantes;
- Controle adaptativo com modelo de referência;
- Sistema *Posicast*;
- Otimização de desempenho sujeito a limitantes sobre o sinal de controle.

Os dois primeiros foram estudados em outra oportunidade, então, nesta aula, serão enfocados os dois últimos.

# Sistema *Posicast*

Para um sistema linear de segunda ordem, com o uso de controle linear, não é possível atingir o valor de referência desejado em tempo finito sem que ocorra sobressinal. Porém, a técnica conhecida como *Posicast*, desenvolvida por Smith, O. J. M. (1957) permite atuar com uma lei de controle não linear simples que conjuga esses dois requisitos: 1) atingimento da referência (em degrau) em tempo finito e 2) inexistência de sobressinal.
O conceito envolve a manipulação da referência em degrau, dividindo-a em duas partes, iniciadas em instantes distintos.

Dado o sistema de segunda ordem com função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

deseja-se atingir um valor $r$ em regime estacionário. Aplicando um sinal degrau de amplitude como referência:

$$u_1(t) = \mathbf{1}(t),$$

em que $\mathbf{1}(t)$ é o sinal degrau unitário:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

A saída associada será solução de:

$$\ddot{y}_1(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}_1(t) + \omega_n^2 y_1(t) = \omega_n^2 u_1(t),$$

Admitindo a forma para solução da parte homogênea:

$$y_1^h(t) = ae^{\lambda t},$$

tem-se

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0,$$

donde

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n,$$

Assumindo que o sistema é submartecido $(0 < \xi < 1)$, para que haja atingimento da referência em tempo finito:

$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n,$$

resultando que

$$y_1^h(t) = a_1 e^{\left(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + a_2 e^{\left(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t}.$$

Uma candidata a solução particular é:

$$y_1^p(t) = \mathbf{1}(t),$$

donde a solução geral tem a forma:

$$\begin{aligned} y_1(t) =& \alpha y_1^h(t) + y_1^p(t) \\ & \alpha a_1 e^{\left(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \alpha a_2 e^{\left(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \mathbf{1}(t) \\ & \bar{a}_1 e^{\left(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \bar{a}_2 e^{\left(-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \mathbf{1}(t). \end{aligned}$$

Partindo, agora, de condições iniciais nulas, i. e., $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$ e admitindo continuidade em $t = 0^+$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + 1 &= 0 \\ -\xi(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + j\sqrt{1-\xi^2}(\bar{a}_1 - \bar{a}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= -\bar{a}_2 - 1 \\
\xi - j\sqrt{1-\xi^2}(1+2\bar{a}_2) &= 0 \\
\bar{a}_2 &= -j\frac{\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2} \\
\bar{a}_1 = j\frac{\xi}{2\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{2} &= \bar{a}_2^*.
\end{aligned}$$

E a solução é:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) =& \bar{a}_1 e^{\left(-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \bar{a}_1^* e^{\left(-\xi-j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t} + \mathbf{1}(t) \\
& \mathbf{1}(t) + 2\,\mathrm{Re}\left\{\bar{a}_1 e^{\left(-\xi+j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_n t}\right\} \\
& \mathbf{1}(t) + e^{-\xi\omega_n t} 2\,\mathrm{Re}\left\{\bar{a}_1 e^{j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t}\right\} \\
& \mathbf{1}(t) + e^{-\xi\omega_n t}\left[-\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right)\right] \\
& \mathbf{1}(t) - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \operatorname{acos}\xi\right).
\end{aligned}
$$

Pela linearidade do sistema, se $u_1(t) = A_1\mathbf{1}(t)$:

$$y_1(t) = A_1\left[\mathbf{1}(t) - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \mathrm{acos}\,\xi\right)\right].$$

O pico de $y_1(t)$ ocorre quando $\dot{y}_1(t_p) = 0$, em que:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) =& A_1\omega_n\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left[\xi\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \mathrm{acos}\,\xi\right) + \right.\\ &\left. - \sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \mathrm{acos}\,\xi\right)\right].\end{aligned}$$

donde

$$\xi\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p + \mathrm{acos}\,\xi\right) - \sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p + \mathrm{acos}\,\xi\right) = 0$$

$$\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p + \mathrm{acos}\,\xi - \mathrm{acos}\,\xi\right) = \mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p\right) = 0.$$

$$\text{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p\right) = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{t_p>0} \sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p = \pi \implies t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}.$$

Substituindo este valor na resposta, encontra-se:

$$\begin{aligned} y_1(t_p) =& A_1\left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}}\text{sen}\left(\pi + \text{acos}\,\xi\right)\right] \\ & A_1\left[1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, para atingir a referência $r$ em $t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}$, basta aplicar a entrada:

$$u_1(t) = A_1 \mathbf{1}(t),$$

em que

$$y_1(t_p) = r \implies A_1 \left[ 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right] = r$$
$$A_1 = \frac{r}{1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}.$$

Contudo, com isso, o valor máximo seria igual à referência e depois o sinal seria sempre menor do que ela, tendendo a $A_1$ quando $t \to \infty$.

Por outro lado, como o sistema é linear e invariante no tempo, aplicando um sinal de entrada a partir de $t_p$ dado por:

$$u_2(t) = A_2 \mathbf{1}(t - t_p),$$

a resposta seria

$$\begin{aligned}
y_2(t) =& A_2 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_p)}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n (t - t_p) + \operatorname{acos}\xi \right) \right], \ t > t_p \\
& A_2 \left[ 1 - \frac{e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \operatorname{acos}\xi - \pi \right) \right], \ t > t_p \\
& A_2 \left[ 1 + \frac{e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right], \ t > t_p,
\end{aligned}$$

com $y_2(t) = 0, \ t \leq t_p$. Isto é, a resposta total seria dada por:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

No intervalo $0 < t \leq t_p$:

$$y(t) = A_1 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right].$$

Já para $t > t_p$

$$\begin{aligned} y(t) =& A_1 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right] + \\ &+ A_2 \left[ 1 + \frac{e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right] \\ & A_1 + A_2 + \left[ \left( A_2 e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - A_1 \right) \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right]. \end{aligned}$$

Para $t > t_p$

$$y(t) = A_1 + A_2 + \left[ \left( A_2 e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - A_1 \right) \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left( \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \operatorname{acos}\xi \right) \right]$$

Tomando

$$A_2 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} A_1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \frac{r}{1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = \frac{r}{1 + e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$

o termo em destaque na expressão de $y(t)$ se anula, restando

$$y(t) = A_1 + A_2 = \frac{r}{1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} + \frac{r}{1 + e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} = r,$$

isto é, o valor da saída permanece precisamente no valor da referência de $t_p$ em diante.

# Implementação do *Posicast*

O *Posicast* requer uma parte linear de controle para que o sistema se comporte como um sistema de segunda ordem com fator de amortecimento $\xi$ e frequência natural $\omega_n$ desejados (que estão relacionados ao tempo de atingimento desejado da referência) e uma parte não linear, que detecta o pico da resposta ao primeiro degrau $u_1(t)$ e aplica o segundo degrau $u_2(t)$. Para essa detecção, convém lembrar que o pico ocorre quando $\dot{y}(t) = 0$ pela primeira vez quando $t > 0$, bastando então verificar quando a derivada se anula pela primeira vez.

# Exemplo de uso do *Posicast*

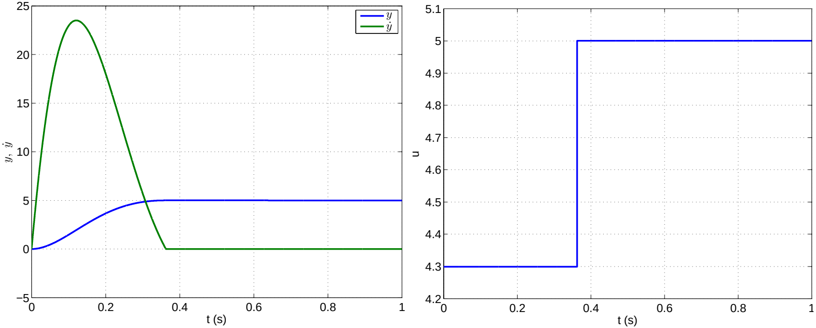
Assumindo que o sistema se comporte como

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100},$$

isto é, o sistema linear em malha fechada tenha um par de polos complexos conjugados com $\xi = 0{,}5$ e $\omega_n = 10\ rad/s$, resultando em $t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} \approx 0{,}3628\ s$. Admitindo o valor desejado de $r = 5$, podem-se calcular as amplitudes dos degraus:

$$A_1 = \frac{r}{1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \approx 4{,}2991, \qquad A_2 = \frac{r}{1 + e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \approx 0{,}7009.$$

Os resultados de simulação podem ser vistos a seguir.


25
20
15
10
5
0
−5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t (s)
$y$, $\dot{y}$
$y$
$\dot{y}$
5.1
5
4.9
4.8
4.7
4.6
4.5
4.4
4.3
4.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t (s)
u

# Otimização sujeita a restrições sobre a excursão do sinal de controle

Seja o problema de controlar o sistema linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \tag{1}$$

em que se deseja obter a lei de controle para comportamento ótimo do sistema com respeito ao índice de desempenho

$$J = \int_{t=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t)\, dt, \tag{2}$$

com $Q > 0$, frequentemente associado a uma operação econômica do sistema, evitando grandes excursões de cada estado. Ainda, o sistema está sujeito a restrições sobre a excursão do sinal de controle:

$$|u_i| \leq \bar{u}_i,$$

sendo $u_i$ a i-ésima componente do vetor de controle.

Definindo uma função candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x},$$

com $P > 0$, tem-se a derivada temporal dada por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}}.$$

Substituindo $\dot{\mathbf{x}}$ de (1):

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) = & (A\mathbf{x} + B\mathbf{u})^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) \\ & \mathbf{x}^T \left(A^T P + PA\right)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T PB\mathbf{u} \\ & \mathbf{x}^T \left(A^T P + PA\right)\mathbf{x} + 2\mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Recordando o problema da solução da Equação de Lyapunov, se o sistema em malha aberta for estável (i.e., a matriz $A$ é Hurwitz) pode-se encontrar $P = P^T > 0$ que resolve a equação:

$$A^T P + PA = -Q$$

em que $Q > 0$ é uma matriz dada.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left(A^T P + PA\right)\mathbf{x} + 2\mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + 2\mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x} \tag{3}$$

$$-\frac{dJ}{dt} + 2\mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}. \tag{4}$$

A primeira parcela do lado direito de (3) resulta em um termo $ND$, pois $Q > 0$. Pode-se manipular a segunda parcela do lado direito de (3) para se obter $2\mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x} \leq 0$ e, aplicando o Segundo método de Lyapunov, concluir que o sistema é assintoticamente estável. Porém, adicionalmente, requer-se minimizar o índice (2), o que pode ser feito integrando (4):

$$\int_{t=0}^{\infty} \dot{V}(\mathbf{x})\, dt = -\int_{t=0}^{\infty} \frac{dJ}{dt}\, dt + 2\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}\, dt,$$

$$V(\mathbf{x}(\infty)) - V(\mathbf{x}(0)) = -J + 2\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}\, dt.$$

$$V(\mathbf{x}(\infty)) - V(\mathbf{x}(0)) = -J + 2\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}\, dt,$$
$$J = V(\mathbf{x}(0)) - V(\mathbf{x}(\infty)) + 2\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}\, dt,$$

por outro lado, se o sistema for assintoticamente estável, $V(\mathbf{x}(\infty)) = \mathbf{x}^T(\infty)P\mathbf{x}(\infty) \to 0$, uma vez que $\mathbf{x}(\infty) \to 0$. Donde

$$J = \underbrace{V(\mathbf{x}(0))}_{\mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0),\ \text{valor fixo}} + 2\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P\mathbf{x}\, dt,$$

em que se nota que apenas a segunda parcela (em destaque) é variável, isto é, pode ser manipulada visando minimizar $J$.

$$\int_{t=0}^{\infty} \mathbf{u}^T B^T P \mathbf{x}\, dt.$$

A fim de minimizar este termo, e considerando os limites sobre as componentes do vetor $\mathbf{u}$, a lei de controle que minimiza $J$ é:

$$u_i(t) = -\bar{u}_i \operatorname{sgn}\left(\mathbf{b}_i^T P \mathbf{x}\right),$$

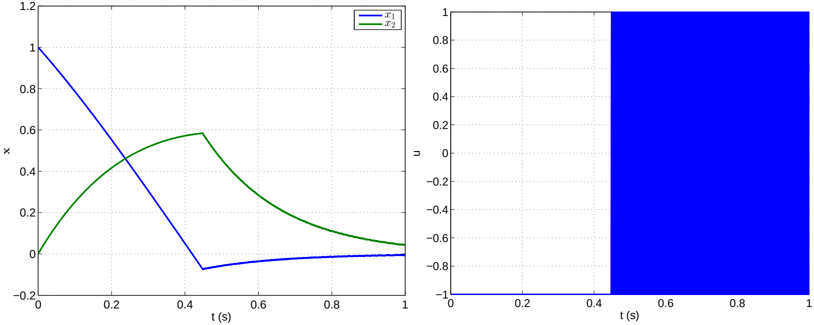
em que $\mathbf{b}_i$ é a i-ésima coluna da matriz $B$.
Conclui-se que a lei de controle ótima consiste em saturar o sinal de controle em seus batentes inferior ou superior a todo instante, a depender do sinal do termo $\mathbf{b}_i^T P \mathbf{x}$.

# Exemplo de aplicação de controle ótimo sujeito a restrições sobre a excursão do sinal de controle

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \\
Q &= I, \;\; \mathbf{x}^T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{u} &= 1.
\end{aligned}
$$

Resulta

$$
P = \begin{bmatrix} 1{,}8333 & 0{,}5000 \\ 0{,}5000 & 0{,}3333 \end{bmatrix}.
$$




Nota-se intenso chaveamento no sinal de controle à medida em que o estado se aproxima da origem. Em uma implementação prática, esse efeito pode ser indesejável. Uma forma de lidar com isso seria suavizar o controle em uma vizinhança admissível da origem.