



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 17 - Controle de Caos pelo método de OGY ¹

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

8 de novembro de 2017

¹Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. **Controlling Chaos**, *Physical Review Letters*, v. 64, n. 11, pp. 1196 – 1199, 1990.

Motivação

- Caos é um fenômeno recorrente em sistemas físicos, tais como:
 - dinâmica de fluidos (convexão de Rayleigh-Bénard);
 - química (reação de Belousov-Zhaobitinsky);
 - lasers;
 - mecânica celeste;
 - eletrônica (circuito de Chua ²);
 - *flutter* em asas de aeronaves;
 - alguns modelos de dinâmica populacional;
 - meteorologia;
 - processos fisiológicos cerebrais ³ e cardíacos.

²M. P. Kennedy, **Three Steps to Chaos - Part II: A Chua's Circuit Primer**, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, v. 40, n. 10, pp. 657-674, 1993.

³Schiff. S. J., Jerger, K., Duong, D. H., Chang, T., Spano, M. L. & Ditto, W. L., **Controlling chaos in the brain**, *Nature*, v. 370, pp. 615 – 620, 1994.



- Em 1990, Ott, Grebogi & Yorke mostraram que qualquer órbita periódica instável do sistema pode ser estabilizada mediante realimentação de um sinal de controle de baixa energia. Como um atrator caótico é denso em órbitas periódicas, há uma gama arbitrariamente grande de comportamentos dinâmicos que podem ser escolhidos e estabilizados com pequeno gasto energético.



Formulação

Um sistema não linear precisa ter ordem ao menos 3 para ocorrência de caos, resultando na equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Definindo uma superfície no \mathbb{R}^n , dada pela equação

$$g(\mathbf{x}) = 0,$$

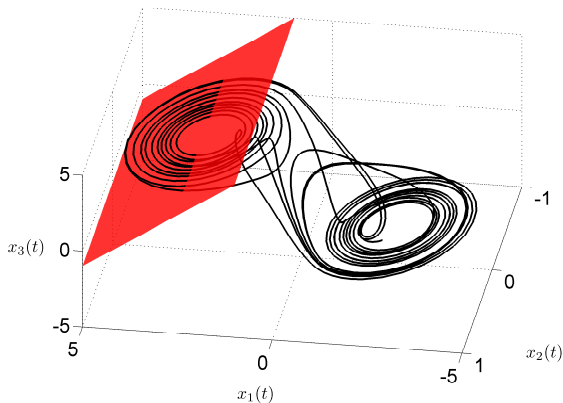
pode-se escrever uma das componentes do estado em função das outras $n - 1$, reduzindo a dimensão para $n - 1$. Suponhamos, agora, que as trajetórias periódicas do sistema interceptem essa superfície (chamada Seção de Poincaré) a cada T unidades de tempo. Nesse caso, tem-se que, nas $n - 1$ coordenadas da superfície dadas no vetor ξ , há um sistema discreto que pode ser escrito como:

$$\xi_{k+1} = \mathbf{h}_k(\xi_k),$$

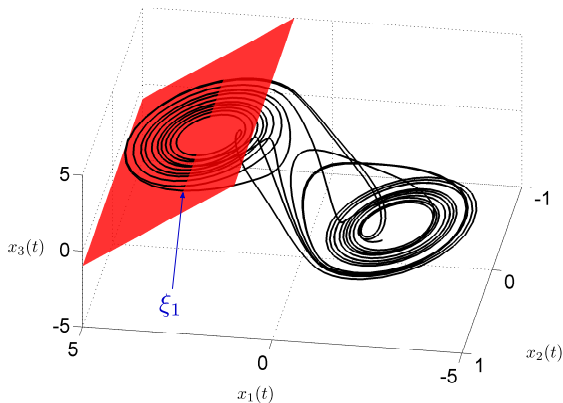
em que o subscrito indica o instante discreto de tempo.



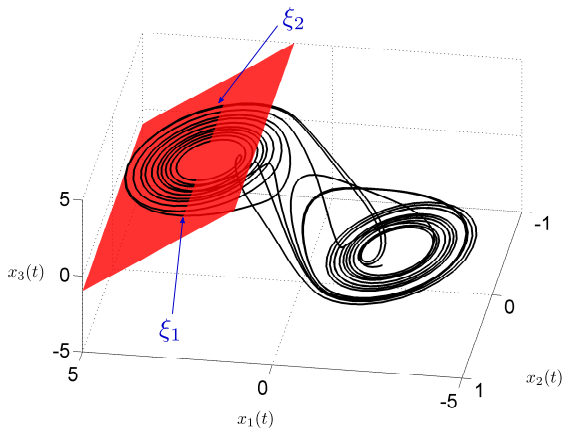
Exemplos de órbitas e Mapa de Poincaré do Circuito de Chua



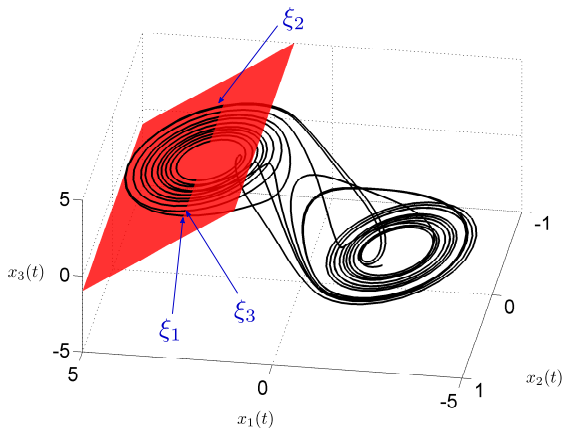
Exemplos de órbitas e Mapa de Poincaré do Circuito de Chua



Exemplos de órbitas e Mapa de Poincaré do Circuito de Chua



Exemplos de órbitas e Mapa de Poincaré do Circuito de Chua



Desenvolvimento com exemplo

O sistema de Lorenz apresenta as seguintes equações:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z.$$

Uma versão simplificada de seu Mapa de Poincaré é o chamado Mapa de Hénon:

$$x_{k+1} = A - x_k^2 + B y_k$$

$$y_{k+1} = x_k$$

que apresenta o ponto fixo dado por (x_f, y_f) obtido admitindo solução estacionária:

$$x_{k+1} = x_k = x_f = A - x_f^2 + B x_f$$

$$y_{k+1} = y_k = y_f = x_f$$



$$y_f = x_f = \frac{B - 1 \pm \sqrt{(1 - B)^2 + 4A}}{2}$$

Define-se o vetor de estados (coordenadas no Mapa de Poincaré):

$$\xi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Se admitirmos que o parâmetro A pode ser controlado com pequenas variações p em torno do valor A_0 ⁴:

$$A = A_0 + p,$$

então o ponto fixo passa a ser:

$$\xi_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{B-1 \pm \sqrt{(1-B)^2 + 4A_0 + 4p}}{2} \\ \frac{B-1 \pm \sqrt{(1-B)^2 + 4A_0 + 4p}}{2} \end{bmatrix}$$

⁴Note que isto introduz uma variável de controle, fazendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, p)$.



Dinâmica em torno do ponto fixo

Pode-se aproximar a dinâmica por um sistema linear para pequenas variações $\Delta\xi_k = \xi_k - \xi_f$ em torno do ponto fixo. Linearizando em torno de $\Delta\xi_k = 0$ por meio do truncamento da série de Taylor:

$$\Delta\xi_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - x_k^2 + By_k \\ x_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\xi_k)} - \xi_f \approx \cancel{\mathbf{f}(\xi_f)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_k} \right|_{\xi_k = \xi_f} \Delta\xi_k - \cancel{\xi_f}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_k} \right|_{\xi_k = \xi_f} = \begin{bmatrix} -2x_f & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\xi_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x_f & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x_k - x_f \\ y_k - y_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}.$$



$$\xi_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x_f & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x_k - x_f \\ y_k - y_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}.$$

os autovalores da matriz M são obtidos por meio da equação característica

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda + 2x_f & -B \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2x_f\lambda - B = 0,$$

donde

$$\lambda_s = \sqrt{x_f^2 + B} - x_f \implies |\lambda_s| < 1,$$

$$\lambda_u = -\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \implies |\lambda_u| > 1.$$

Isto é, o primeiro autovalor está associado a um modo estável, enquanto o segundo, a um modo instável.



Calculando o autovetor associado a λ_s :

$$M\xi_s = \begin{bmatrix} -2x_f\xi_{s1} + B\xi_{s2} \\ \xi_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \right) \xi_{s1} \\ \left(\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \right) \xi_{s2} \end{bmatrix}$$

donde

$$\xi_s = \begin{bmatrix} \sqrt{x_f^2 + B} - x_f \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizando:

$$e_s = \begin{bmatrix} \sqrt{x_f^2 + B} - x_f \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 2x_f^2 + B - 2x_f\sqrt{x_f^2 + B}}}.$$



Calculando o autovetor associado a λ_u :

$$M_{\xi_u}^{\xi} = \begin{bmatrix} -2x_f \xi_{u1} + B \xi_{u2} \\ \xi_{u1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \right) \xi_{u1} \\ \left(-\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \right) \xi_{u2} \end{bmatrix}$$

donde

$$\xi_u = \begin{bmatrix} -\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizando:

$$e_u = \begin{bmatrix} -\sqrt{x_f^2 + B} - x_f \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 2x_f^2 + B + 2x_f \sqrt{x_f^2 + B}}}.$$



Tomando o produto

$$M \underbrace{\begin{bmatrix} e_u & e_s \end{bmatrix}}_E = \begin{bmatrix} Me_u & Me_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_u e_u & \lambda_s e_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_u & e_s \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{bmatrix}}_\Lambda$$

donde

$$ME = E\Lambda.$$

Como os autovalores λ_u e λ_s são ambos reais e distintos, a matriz E é não singular, assim:

$$M = E\Lambda E^{-1}.$$



Reescrevendo a matriz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_u^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \end{bmatrix},$$

pode-se reescrever

$$M = E\Lambda E^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_u e_u & \lambda_s e_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_u^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \end{bmatrix} = \lambda_u e_u \boldsymbol{\varepsilon}_u^T + \lambda_s e_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T.$$

Retornando à expressão de ξ_{k+1} :

$$\xi_{k+1} = (\lambda_u e_u \boldsymbol{\varepsilon}_u^T + \lambda_s e_s \boldsymbol{\varepsilon}_s^T) (\xi_k - \xi_f) + \xi_f.$$

Por outro lado,

$$I = E^{-1}E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_u^T e_u & \boldsymbol{\varepsilon}_u^T e_s \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^T e_u & \boldsymbol{\varepsilon}_s^T e_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Para estabilizar ξ_k em torno de ξ_f , deseja-se que não haja componente alinhada com o modo instável, i. e., que ξ_{k+1} esteja ortogonal a e_u . Note que ε_u apresenta componente alinhada com o modo instável ($\varepsilon_u^T e_u = 1$) e, ao mesmo tempo, é ortogonal ao modo estável ($\varepsilon_u^T e_s = 0$). Assim, deseja-se que o vetor ξ_{k+1} seja ortogonal a ε_u , de forma que **não tenha componente alinhada com o modo instável**:

$$\varepsilon_u \cdot \xi_{k+1} = 0$$

Substituindo a expressão para ξ_{k+1} :

$$\varepsilon_u \cdot \xi_{k+1} = \left(\underbrace{\lambda_u \varepsilon_u \cdot e_u}_{\varepsilon_u^T e_u = 1} \varepsilon_u^T + \underbrace{\lambda_s \varepsilon_u \cdot e_s}_{\varepsilon_u^T e_s = 0} \varepsilon_s^T \right) (\xi_k - \xi_f) + \varepsilon_u \cdot \xi_f = 0 \quad (1)$$

$$\lambda_u \varepsilon_u^T (\xi_k - \xi_f) + \varepsilon_u^T \xi_f = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_u^T \xi_f = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \varepsilon_u^T \xi_k \quad (3)$$



Lembrando que o parâmetro A será controlado com pequenas variações p em torno do valor A_0 , pode-se linearizar $\xi_f(p)$ em torno de $p = 0$ por meio do truncamento da série de Taylor.

$$\delta \xi_f(p) = \underbrace{\frac{\partial \xi_f(p)}{\partial p} \Big|_{p=0}}_{\mathbf{g}} p = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{(1-B)^2 + 4A_0}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{(1-B)^2 + 4A_0}} \end{bmatrix} p$$

Assim obtém-se uma relação linear entre a variação no parâmetro e o ponto fixo, a ser substituída em (3) para o cálculo de p (assumindo que $\xi_f(0) = 0$, o que sempre pode ser obtido mediante uma translação de coordenadas com (x_f, y_f) na origem):

$$\epsilon_u^T \mathbf{g} p = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \epsilon_u^T \xi_k \quad (4)$$

$$p_k = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{\epsilon_u^T \xi_k}{\epsilon_u^T \mathbf{g}} \quad (5)$$

em que $p = p_k$ foi assumido variar a cada T unidades de tempo como função das coordenadas na Seção de Poincaré ξ_k .



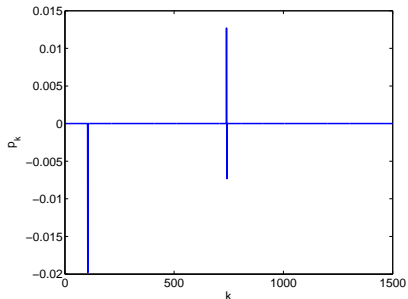
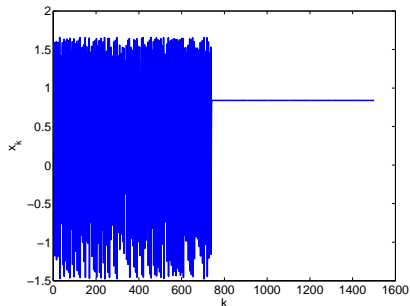
De forma a economizar energia, o parâmetro p é limitado a $|p_k| \leq p^* > 0$. Caso $|p_k| > p^*$, assume-se $p_k = 0$.

Assim, define-se uma vizinhança ξ^* do ponto fixo onde se tenta capturar a órbita desejada. A premissa de **ergodicidade** é usada para se argumentar que as órbitas devem passar na vizinhança desejada, contudo o tempo para que isso ocorra é inversamente proporcional a p^* , definindo uma fase de movimento caótico e outra controlada.



Exemplo numérico

Tomando $A_0 = 1,29$, $B = 0,3$ e $p^* = 0,02$, têm-se $x_f = y_f = 0,8385$.
Partindo de $\xi_0^T = [0,1 \ 0]$, pode-se ver o período caótico e, posteriormente, a estabilização no ponto fixo:



Presença de ruído

Em sistemas reais, a presença de ruído não deve permitir que se permaneça no ponto fixo como no exemplo anterior. Mesmo assim, deve ser possível permanecer na vizinhança do mesmo, sendo que, a depender da energia de controle (p^*), o ruído pode atirar o estado para longe da vizinhança de captura, retornando a essa devido à ergodicidade. Quanto maior a “potência” do ruído em comparação com a energia de controle, mais tempo se passa afastado do ponto fixo na fase caótica. No exemplo do Mapa de Hénon, adiciona-se ruído de igual potência às duas componentes do vetor de estados:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A - x_k^2 + B y_k + P_w w_k^x \\ y_{k+1} &= x_k + P_w w_k^y\end{aligned}$$

em que $w_k^x, w_k^y \sim \mathcal{N}(0,1)$.



Exemplo numérico com ruído

Tomando $A_0 = 1,29$, $B = 0,3$ e $p^* = 0,2$, têm-se $x_f = y_f = 0,8385$. Partindo de $\xi_0^T = [0 \ 0]$ e usando a mesma semente para gerar os ruídos, adotaram-se $P_w = 3,5 \times 10^{-2}$ no gráfico da esquerda e $P_w = 4,0 \times 10^{-2}$. Nota-se a presença de mais ocorrências de períodos caóticos no gráfico da direita, pois o ruído tem maior potência e a energia de controle é a mesma nos dois casos.

