Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 3 - Plano de fase para análise de sistemas não lineares [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 2, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Análise gráfica de trajetórias de sistemas no plano

Complexidade de analisar sistemas não lineares:

- Impossível usar o domínio transformado;
- Dificuldade em integrar as equações numericamente (fenômenos como caos e não linearidades descontínuas podem dificultar o processo de integração numérica).

Uma primeira estratégia consiste em resolver graficamente para diversas CIs, obtendo uma família de trajetórias do sistema não linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

Por ser um método gráfico, restringe-se a sistemas de ordem 1 ou 2, isto é, em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ ou $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

- Vantagens:
  - visualização da família de trajetórias fornece um profundo conhecimento do comportamento do sistema;
  - simplicidade de construção.
- Desvantagem: restrito a sistemas de ordens 1 ou 2.

Construção do plano de fase

Usualmente se associam as variáveis:

- x ao eixo das abscissas,
- $\dot{x}$ ao eixo das ordenadas,

pois muitos sistemas práticos podem ser descritos por:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{2}$$

Contudo, pode-se generalizar para quaisquer variáveis de estado

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \tag{3}$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \tag{4}$$

Determinação analítica

Podem-se encontrar as trajetórias resolvendo as EDOs analiticamente e eliminando o tempo.

Exemplo: oscilador harmônico

$$\ddot{x} = -x.$$

Solução:

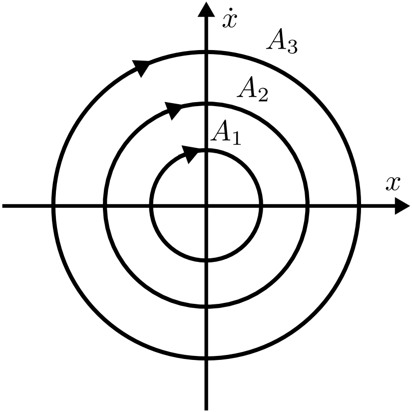
$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(t+\phi) \\ \dot{x}(t) &= -A\,\mathrm{sen}\,(t+\phi) \end{aligned}$$

donde:

$$x^2 + \dot{x}^2 = A^2$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = A^2$$

Família de circunferências centradas na origem com raio A.



Solução implícita

Alternativamente, pode-se resolver a EDO:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}$$

Exemplo: oscilador harmônico

$$\ddot{x} = -x.$$

Variáveis de estado:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

donde:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 = f_2(x_1,x_2)$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = -\frac{x_2}{x_1}$$

donde:

$$\int x_1 dx_1 + \int x_2 dx_2 = 0$$
$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + C = 0$$

Tomando $C = -\frac{A^2}{2}$, tem-se

$$x_1^2 + x_2^2 = A^2$$

Método das isóclinas

Método gráfico a partir do conhecimento dos valores α das tangentes às trajetórias para cada ponto do plano $x_1 \times x_2$.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$$

Isóclina: lugar geométrico dos pontos no plano $x_1 \times x_2$ dos pontos que apresentam a mesma inclinação α.

Exemplo: oscilador harmônico

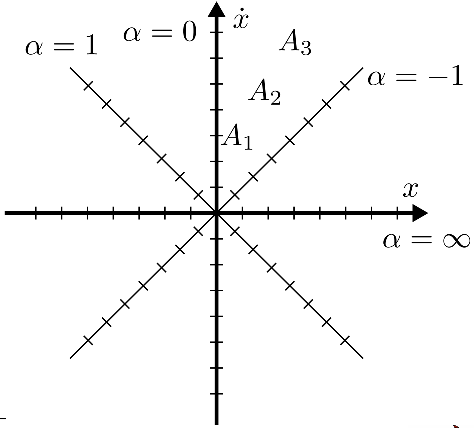
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} = \alpha \rightarrow x_1 + \alpha x_2 = 0 \text{ (retas passando pela origem)}$$

$$\alpha = 0: \quad \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \rightarrow x_2 = 0$$ [2]

$$\alpha = 1: \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\alpha = -1: \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$\alpha = \infty: \quad \frac{dx_1}{dx_2} = 0 \rightarrow x_1 = 0$$ [2]



[2] Constante e passando pela origem.

[2] Constante e passando pela origem.

Exemplo: oscilador harmônico

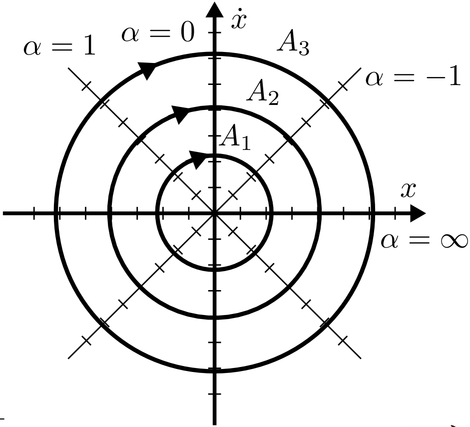
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} = \alpha \rightarrow x_1 + \alpha x_2 = 0 \text{ (retas passando pela origem)}$$

$$\alpha = 0: \quad \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \rightarrow x_2 = 0$$ [2]

$$\alpha = 1: \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\alpha = -1: \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$\alpha = \infty: \quad \frac{dx_1}{dx_2} = 0 \rightarrow x_1 = 0$$ [2]



[2]Constante e passando pela origem.

[2]Constante e passando pela origem.

Exemplo: equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + 0{,}2(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Variáveis de estado:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

No espaço de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -0{,}2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 = f_2(x_1, x_2)$$

Assim:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-0{,}2(x_1^2 - 1)x_2 - x_1}{x_2} = \alpha$$

Donde:

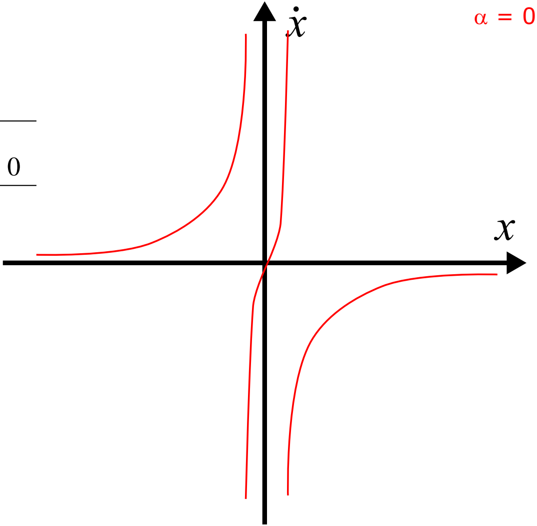
$$0{,}2(1 - 5\alpha - x_1^2)x_2 - x_1 = 0$$

$$(1-5\alpha-x_1^2)x_2-5x_1=0$$

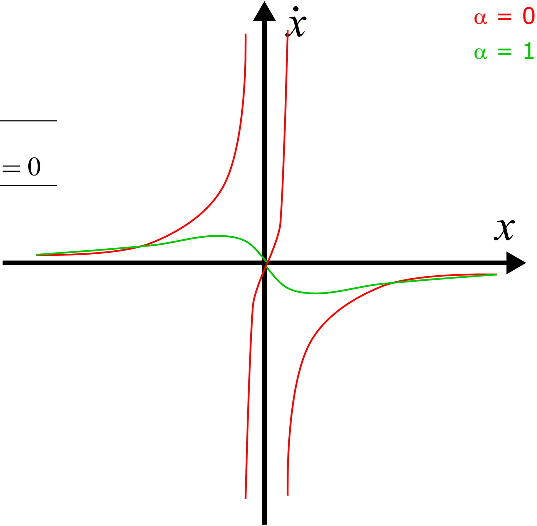
Tabelando para valores de α, x_1 e x_2:

	x_2		
	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=-1$
x_1	$(1-x_1^2)x_2-5x_1=0$	$(-4-x_1^2)x_2-5x_1=0$	$(6-x_1^2)x_2-5x_1=0$
0	0	0	0
1	∞	-1	1
2	$-3{,}33$	$-1{,}25$	5
5	$-1{,}04$	$-0{,}86$	$-1{,}31$
10	$-0{,}505$	$-0{,}48$	$-0{,}53$
-1	$-\infty$	1	-1
-2	3,33	1,25	-5
-5	1,04	0,86	1,31
-10	0,505	0,48	0,53

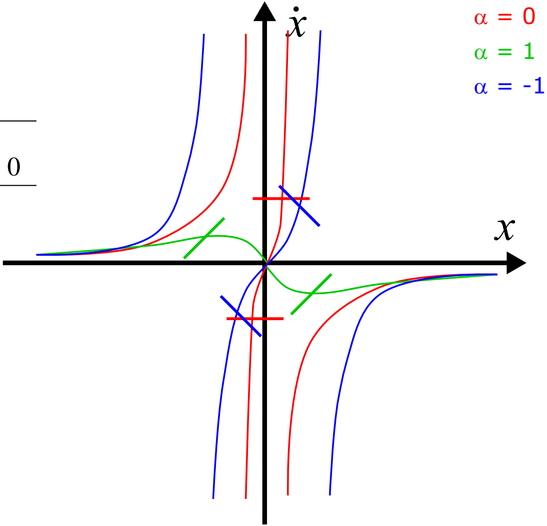
	x_2
	$\alpha = 0$
x_1	$(1 - x_1^2)x_2 - 5x_1 = 0$
0	0
1	∞
2	$-3{,}33$
5	$-1{,}04$
10	$-0{,}505$
-1	$-\infty$
-2	$3{,}33$
-5	$1{,}04$
-10	$0{,}505$



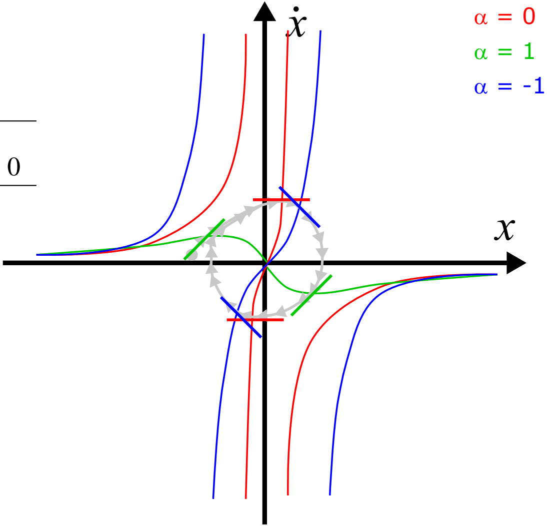
x_1	x_2 $\alpha = 1$ $(-4 - x_1^2)x_2 - 5x_1 = 0$
0	0
1	-1
2	$-1{,}25$
5	$-0{,}86$
10	$-0{,}48$
-1	1
-2	$1{,}25$
-5	$0{,}86$
-10	$0{,}48$



x_1	x_2 $\alpha = -1$ $(6 - x_1^2)x_2 - 5x_1 = 0$
0	0
1	1
2	5
5	$-1{,}31$
10	$-0{,}53$
-1	-1
-2	-5
-5	$1{,}31$
-10	$0{,}53$



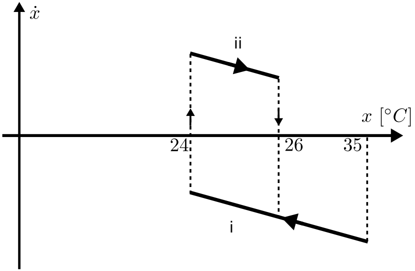
x_1	x_2
	$\alpha = -1$
	$(6 - x_1^2)x_2 - 5x_1 = 0$
0	0
1	1
2	5
5	$-1{,}31$
10	$-0{,}53$
-1	-1
-2	-5
-5	$1{,}31$
-10	$0{,}53$



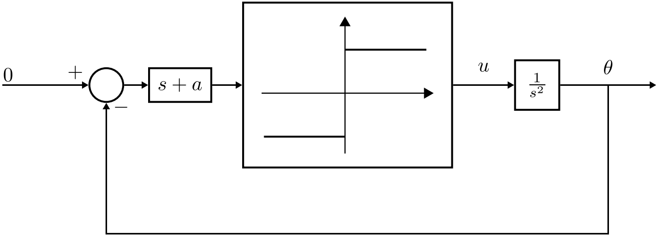
Exemplo: Retomando o exemplo do condicionador de ar, há duas possibilidades de equações diferenciais a depender do valor da temperatura x:

$$\text{i) } \dot{x} = -\alpha x + (\alpha T - \beta) = \alpha(15 - x),$$
$$\text{ii) } \dot{x} = -\alpha x + \alpha T = \alpha(35 - x).$$

A comutação entre estas retas ocorre em $x = 26^\circ C$ (de i para ii) e em $x = 26^\circ C$ (de ii para i). Desenhando a trajetória partindo de $x(0) = 35^\circ C$:



Exemplo: Seja o sistema de controle



Tem-se:

$$\ddot{\theta} = \mathrm{sgn}(-\dot{\theta} - a\theta) = -\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta} + a\theta)$$

$\dot{\theta} + a\theta = 0$ (reta de comutação).

Então, é necessário analisar dois casos:

i) $\dot{\theta} + a\theta < 0$,

ii) $\dot{\theta} + a\theta > 0$.

Caso i:

$$\text{i) } \dot{\theta} + a\theta < 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 1,$$

donde

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_0) + [t - t_0], \tag{5}$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}[t - t_0]^2 \tag{6}$$

Isolando $[t - t_0]$ em (5) e substituindo em (6):

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_0)] + \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_0)]^2 \\ &= \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)\dot{\theta}(t) - [\dot{\theta}(t_0)]^2 + \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)]^2 - \dot{\theta}(t_0)\dot{\theta}(t) + \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t_0)]^2\end{aligned}$$

Reordenando:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)]^2 - \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t_0)]^2 + \theta(t_0) \tag{7}$$

Caso ii:

$$\text{ii) } \dot{\theta} + a\theta > 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = -1,$$

donde

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t_0) - [t - t_0], \tag{8}$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \dot{\theta}(t_0)[t - t_0] - \frac{1}{2}[t - t_0]^2 \tag{9}$$

Isolando $[t - t_0]$ em (8) e substituindo em (9):

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t_0) - \dot{\theta}(t_0)[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_0)] - \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_0)]^2 \\ &= \theta(t_0) - \dot{\theta}(t_0)\dot{\theta}(t) + [\dot{\theta}(t_0)]^2 - \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)]^2 + \dot{\theta}(t_0)\dot{\theta}(t) - \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t_0)]^2 \end{aligned}$$

Reordenando:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}[\dot{\theta}(t)]^2 + \frac{1}{2}[\dot{\theta}(t_0)]^2 + \theta(t_0) \tag{10}$$

De (7) e (10), as possíveis trajetórias no plano $\dot{\theta} \times \theta$ são parábolas. Desenhando estas parábolas para vários valores de CIs e a reta de comutação para $a = 5$, além de uma trajetória representativa partindo de $\theta(0) = 5$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ tem-se: