Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 6 - Linearização empregando a expansão em série de Taylor [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 3, Seção 3, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Linearização empregando a expansão em série de Taylor

- Método usado para obter modelos lineares usados para fins de projeto de controladores lineares;
- Requer que a função não linear seja suave;
- Modelo linear obtido tem resposta similar à do sistema não linear na “vizinhança” da trajetória escolhida para linearização.

Sejam o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), \qquad (1)$$

e uma trajetória desse sistema, i .e, uma solução da EDO (1)

$$\bar{\mathbf{x}}(t),$$

correspondente a uma entrada

$$\bar{\mathbf{u}}(t),$$

tem-se que:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}), \qquad (2)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}),$$

Perturbando esta $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$, obtemos a seguinte candidata a solução

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \delta\mathbf{x}(t),$$

correspondente à entrada

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \delta\mathbf{u}(t).$$

Substituindo estas candidatas na EDO (1):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}). \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}). \tag{4}$$

Expandindo o termo do lado direito de (4) em série de Taylor em torno de $\bar{\mathbf{x}}$ e de $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{u} + O\left(\|\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}\|^2\right). \tag{5}$$

Em que $O\left(\|\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}\|^2\right)$ contém termos de ordem maior. Então,

$$\cancel{\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \cancel{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{u} + O\left(\|\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}\|^2\right).$$

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}\delta\mathbf{u} + O\left(\|\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{u}\|^2\right).$$

Para perturbações ditas “pequenas”, os termos de mais alta ordem em $O\left(\|\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{u}\|^2\right)$ podem ser desprezados em comparação com os demais, resultando no modelo linearizado:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}}_{A}\delta\mathbf{x} + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}}_{B}\delta\mathbf{u}. \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = A\delta\mathbf{x} + B\delta\mathbf{u}.$$

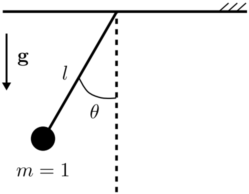
No caso de a linearização ser realizada em torno de um ponto de equilíbrio (PE):

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{eq},$$
$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_{eq},$$

as matrizes A e B são independentes do tempo.
Caso contrário, têm-se

$$A = A(t),$$
$$B = B(t).$$

Pêndulo de haste rígida



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta$$

Em variáveis de estado

$$x_1 = \theta \qquad\qquad x_2 = \dot{\theta},$$

têm-se

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1$$

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix}.$$

Encontrando os pontos de equilíbrio:

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_{2eq} = 0 \\ x_{1eq} = k\pi \end{matrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

Derivando

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nos pontos de equilíbrio

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(k\pi) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(k\pi) & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos apenas duas situações distintas: $k = 0$ e $k = 1$, visto que as demais são redundantes. Calculando

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_0) = \lambda^2 + \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

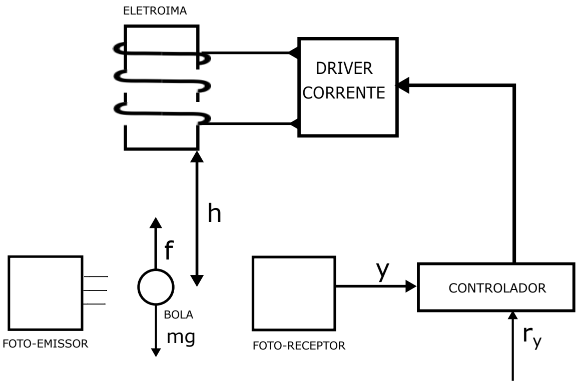
$$\det(\lambda I - A_0) = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Levitador magnético



$f = k\frac{i^2}{h^2}$ é a força de atração magnética. Da segunda lei de Newton aplicada à bola:

$$m\frac{d^2h}{dt} = mg - k\frac{i^2}{h^2}$$

Têm-se ainda:

- k: ganho de conversão eletromecânica;
- m: massa da esfera;
- g: aceleração da gravidade;
- $i = ru + i_0$: corrente na bobina;
- $y = \gamma h + y_0$: tensão no sensor.

Escolhendo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{y} = \gamma\ddot{h} = \left(g - \frac{ki^2}{mh^2}\right)\gamma. \end{cases} \tag{7}$$

Em seguida, linearizamos em torno de $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Cabe ressaltar que

$$y = \gamma h + y_0 \rightarrow h = \frac{x_1 - y_0}{\gamma}.$$

Assim, aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial\clubsuit}{\partial x_1} = \frac{\partial\clubsuit}{\partial h}\frac{dh}{dx_1} = \frac{\partial\clubsuit}{\partial h}\frac{1}{\gamma}.$$

De maneira análoga:

$$\frac{\partial\spadesuit}{\partial u} = \frac{\partial\spadesuit}{\partial i}\frac{di}{de} = \frac{\partial\spadesuit}{\partial i}r.$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \gamma g - \frac{\gamma k}{m}\frac{i^2}{h^2} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(x_1, x_2, u) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\frac{\gamma k}{m}\frac{i^2}{h^3}\frac{1}{\gamma} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\frac{k}{m}\frac{i^2}{h^3} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\gamma\frac{k}{m}\frac{i}{h^2}r \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\bar{h} = \frac{\bar{y} - y_0}{\gamma} \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underbrace{2\frac{k}{m}\frac{(r\bar{u}+i_0)^2}{(\bar{y}-y_0)^3}\gamma^3}_{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\gamma\frac{k}{m}\frac{(r\bar{u}+i_0)}{(\bar{y}-y_0)^2}\gamma^2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underbrace{-2\gamma^3\frac{k}{m}\frac{(r\bar{u}+i_0)}{(\bar{y}-y_0)^2}r}_{\beta} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Da condição de equilíbrio:

$$\cancel{\gamma} g = \cancel{\gamma}\frac{k}{m}\frac{(r\bar{u}+i_0)^2}{(\bar{y}-y_0)^2}\gamma^2 \tag{14}$$

$$r\bar{u}+i_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{(\bar{y}-y_0)}{\gamma} \tag{15}$$

$$\bar{u}=0 \rightarrow \alpha = \frac{2\gamma g}{\bar{y}-y_0} \rightarrow \beta = \frac{2\gamma g r}{i_0} = \frac{2r\gamma^2}{\bar{y}-y_0}\sqrt{\frac{kg}{m}} \tag{16}$$

Substituindo os valores:

- $m = 2{,}12 \cdot 10^{-2}\ kg$;
- $g = 9{,}8\ m/s^2$;
- $y_0 = -7{,}47\ V$;
- $\gamma = 328\ V/m$;
- $i_0 = 0{,}514\ A$;
- $r = 0{,}166\ A/V$;
- $k = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ Nm^2/A^2$;
- $\bar{y} = 0$.

Têm-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 861 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1126 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$