**Instituto Tecnológico de Aeronáutica**
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

# Aula 7 - Linearização exata por realimentação de estados [1] [2]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

[1] A. C. Faleiros & T. Yoneyama, *Teoria Matemática de Sistemas*, Arte e Ciência, 2002

[2] J.-J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 6, Seção 1.3, Englewood

# Linearização exata por realimentação de estados

Este método permite linearizar o sistema exatamente, de forma que se comporta como previsto independentemente de estar em uma vizinhança em torno da trajetória de linearização.
**Exemplo**: Seja o sistema

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \operatorname{sen} x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + \cos(2x_1)u$$

Como escolher o sinal de controle $u$ para obter uma dinâmica linear válida para todo o $\mathbb{R}^2$?

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ax_2 + \operatorname{sen} x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 \cos x_1 + \cos(2x_1)u$$

**Ideia 1**: Redefinir as variáveis de estado, de forma que a EDO de $\dot{x}_1$ fique linear, pois não a conseguimos manipular diretamente por meio de $u$. Escolhendo:

$$z_1 = x_1,$$
$$z_2 = ax_2 + \operatorname{sen} x_1,$$

vemos que $z_2$ é igual aos dois termos mais à direita de EDO de $\dot{x}_1$, incluindo o termo não linear $\operatorname{sen} x_1$. Esta escolha de variáveis de estado já lineariza a primeira EDO, pois:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = -2\underbrace{x_1}_{z_1} + \underbrace{ax_2 + \operatorname{sen} x_1}_{z_2} = -2z_1 + z_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \operatorname{sen} x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + \cos(2x_1)u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1,\\ z_2 &= ax_2 + \operatorname{sen} x_1 \to x_2 = \frac{z_2}{a} - \frac{\operatorname{sen} z_1}{a},\end{aligned}$$

Calculando agora

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 =& a\dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos x_1 = a[-x_2 \cos z_1 + \cos(2z_1)u] + (-2z_1 + z_2)\cos z_1\\ & a\left[-\left(\frac{z_2}{a} - \frac{\operatorname{sen} z_1}{a}\right)\cos z_1 + \cos(2z_1)u\right] + (-2z_1 + z_2)\cos z_1\\ & \cancel{-z_2 \cos z_1} + \operatorname{sen} z_1 \cos z_1 + a\cos(2z_1)u - 2z_1 \cos z_1 + \cancel{z_2 \cos z_1}\\ & \operatorname{sen} z_1 \cos z_1 + a\cos(2z_1)u - 2z_1 \cos z_1\end{aligned}$$

$$\dot{z}_2 = \operatorname{sen} z_1 \cos z_1 + a\cos(2z_1)u - 2z_1\cos z_1$$

Escolhendo

$$u = \frac{2z_1\cos z_1 - \operatorname{sen} z_1 \cos z_1 + v}{a\cos(2z_1)}$$

Tem-se:

$$\dot{z}_2 = v$$

Assim o sistema fica:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2\\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}$$

que é linear considerando os estados $z_1$ e $z_2$ e a entrada $v$.

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$
$$\dot{z}_2 = v$$

Este sistema é controlável, então podem-se alocar os autovalores em quaisquer posições desejadas, podendo estabilizar o sistema em MF mediante a lei de controle:

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 = -\mathbf{kz}.$$

# Proposta de método

Baseado neste exemplo, podemos propor o seguinte procedimento:
Seja o sistema for descrito por

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u,$$

em que $u$ é a entrada de controle e

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

é o vetor de estados.

O sistema pode ser colocado na forma companheira

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \end{bmatrix},$$

emm que $f$ e $g$ são funções possivelmente não lineares. Escolhendo o sinal de controle como

$$u = \frac{v - f}{g},$$

obtém-se a linearização por realimentação.

Resultando

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}.$$

Basta determinar $v$ para estabilizar o sistema e o projeto estará completo. Uma alternativa é escolher:

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 - \cdots - k_n x_n = \mathbf{kx}.$$

Se o sistema for controlável, podem-se alocar os autovalores em quaisquer posições desejadas.
Caso o sistema não seja dado na forma companheira, é necessária uma mudança de variáveis de estado.

# Formalização do método

Caso o sistema esteja na forma especial

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = A\bar{\mathbf{z}} + B\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}})[\mathbf{u} - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})],$$

a lei de controle

$$\mathbf{u} = \beta(\bar{\mathbf{z}})\bar{\mathbf{v}} + \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}),$$

torna este sistema linear:

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = A\bar{\mathbf{z}} + B\bar{\mathbf{v}}.$$

Se o par $(A,B)$ for controlável, existe uma matriz $P$ não singular que realiza a mudança de variáveis

$$\mathbf{z} = P\bar{\mathbf{z}},$$

colocando o sistema na forma canônica controlável

$$\dot{\mathbf{z}} = P\dot{\bar{\mathbf{z}}} = PA\bar{\mathbf{z}} + PB\bar{\mathbf{v}} = \underbrace{PAP^{-1}}_{A_C}\mathbf{z} + \underbrace{PB}_{b_C}\bar{\mathbf{v}}.$$

As matrizes são

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \; B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se escolher a lei de controle

$$\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{k}\mathbf{z} + \mathbf{v},$$

determinando $\mathbf{k} = -[a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]^T$ de modo a alocar todos os autovalores de $A - B\mathbf{k}$ em $0$. Assim, o sistema ficaria

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ & A_B \mathbf{z} + B_B \mathbf{v},\end{aligned}$$

que á a chamada representação na forma canônica de Brunovsly, equivalente a uma cadeia de $n$ integradores do sinal de entrada.

Lembrando que

$$\mathbf{u} = \beta(\bar{\mathbf{z}})\bar{\mathbf{v}} + \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}),$$

$$\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{k}\mathbf{z} + \mathbf{v},$$

e

$$\mathbf{z} = P\bar{\mathbf{z}},$$

tem-se

$$\mathbf{u} = \beta(\bar{\mathbf{z}})[-\mathbf{k}P\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{v}] + \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) = \beta(\bar{\mathbf{z}})\mathbf{v} + \underbrace{\bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}}) - \beta(\bar{\mathbf{z}})\mathbf{k}P\bar{\mathbf{z}}}_{\alpha(\bar{\mathbf{z}})},$$

que é a lei de controle estabilizante procurada em função de $\bar{\mathbf{z}}$.

# Método

A ideia é encontrar uma transformação $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ que permita reescrever o sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$

na forma

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = A\bar{\mathbf{z}} + B\beta^{-1}(\bar{\mathbf{z}})[\mathbf{u} - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})].$$

Fazendo

$$\bar{\mathbf{z}} = T(\mathbf{x}),$$

tem-se

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u.$$

Em particular, buscam-se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ tais que

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{z}}} =& A_B\bar{\mathbf{z}} + B_B\bar{\beta}^{-1}(\bar{\mathbf{z}})[\mathbf{u} - \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{z}})] \\ & A_B T(\mathbf{x}) + B_B\bar{\beta}^{-1}(T(\mathbf{x}))[\mathbf{u} - \bar{\alpha}(T(\mathbf{x}))] \\ & A_B T(\mathbf{x}) + B_B\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{u} - \tilde{\alpha}(\mathbf{x})].\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$

Devem-se ter

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= A_B T(\mathbf{x}) - B_B\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})\tilde{\alpha}(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= B_B\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} T(\mathbf{x}) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})\tilde{\alpha}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}).$$

Assim

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_3(\mathbf{x})$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \frac{\partial T_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})\tilde{\alpha}(\mathbf{x}).$$

Analogamente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \frac{\partial T_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})$$

**Exemplo**

Considere o sistema

$$\dot{x}_1 = -a \operatorname{sen} x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u.$$

Então:

$$\mathbf{f}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -a \operatorname{sen} x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix},\ \mathbf{g}(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Buscamos encontrar a transformação $T$ que satisfaça:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x})\tilde{\alpha}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \tilde{\beta}^{-1}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

De (4) e (1), tem-se que:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0. \tag{6}$$

Por outro lado, usando (2), (1) e o resultado de (6):

$$-a \,\text{sen}\, x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = T_2(\mathbf{x}), \tag{7}$$

donde:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_1} = -a \,\text{sen}\, x_2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} = -a \cos x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_1}, \tag{9}$$

Adotando

$$T_1(\mathbf{x}) = x_1, \tag{10}$$

satisfaz-se (6). Substituindo também em (11), resulta:
Por outro lado, usando (2), (1) e o resultado de (6):

$$T_2(\mathbf{x}) = -a \operatorname{sen} x_2. \tag{11}$$

Finalmente, para obter a lei de controle de realimentação de estados com linearização exata, basta resolver (5) para encontrar $\tilde{\beta}(\mathbf{x})$ e, com este valor, resolver (3) $\tilde{\alpha}(\mathbf{x})$:

$$\tilde{\beta}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right]^{-1} = -\frac{1}{a\cos x_2}, \tag{12}$$

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) = -\tilde{\beta}(\mathbf{x})\left(-x_1^2\right)\left(-a\cos x_2\right) = x_1^2. \tag{13}$$

A lei de controle resultante é

$$u = \beta(\bar{\mathbf{x}})v + \bar{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{a\cos x_2}v + x_1^2,$$

substituindo em

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a\,\mathrm{sen}\,x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u,\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a\,\mathrm{sen}\,x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - \frac{1}{a\cos x_2}v + x_1^2 = -\frac{1}{a\cos x_2}v.\end{aligned}$$

Determinando $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} z_1 =& x_1, \\ z_2 =& -a \operatorname{sen} x_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 =& \dot{x}_1 = -a \operatorname{sen} x_2 = z_2, \\ \dot{z}_2 =& -a\dot{x}_2 \cos x_2 = -a \left(-\frac{1}{a \cos x_2} v\right) \cos x_2 = v, \end{aligned}$$

o que permite concluir que a lei de controle encontrada de fato lineariza e estabiliza o sistema.