Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 8 - Linearização entrada saída e dinâmica zero [1] [2]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

30 de agosto de 2017

[1] A. C. Faleiros & T. Yoneyama, *Teoria Matemática de Sistemas*, Arte e Ciência, 2002

[2] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 6, Seção 1.3, Englewood

Linearização entrada saída e dinâmica zero

Certos sistemas podem ter uma função de saída não linear, além da própria dinâmica. Nesse caso, o método de linearização exata por realimentação de estados visto na Aula 7 não pode ser aplicado diretamente, pois só lineariza a dinâmica entre a entrada e os estados. No entanto, caso algumas propriedades sejam atendidas, pode-se obter um sistema linear entre a entrada e a saída.

Consideremos o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u,$$
$$y = h(\mathbf{x}),$$

com $u, y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Se h pudesse ser utilizada para construir a transformação T de forma que $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ com:

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}),$$
$$T_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_{i-1}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ 2 \leq i \leq n$$

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}),$$
$$T_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_{i-1}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ 2 \leq i \leq n$$

Ter-se-ia o sistema:

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{dT(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u] = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} T(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_B} T(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) u$$

Adicionalmente, impondo:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq n-1,$$
$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 1,$$

Adicionalmente, impondo:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \le i \le n-1,$$
$$\frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 1,$$

Ter-se-ia:

$$\dot{\mathbf{z}} = A_B T(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x})u = A_B T(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_B} u$$

Finalmente, escolhendo:

$$u = v - \frac{\partial T_n}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

O sistema resultante, então, seria:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A_B T(\mathbf{x}) + B_B v = A_B \mathbf{z} + B_B v \\ y &= h(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) = z_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C} \mathbf{z} \end{aligned}$$

Em suma, na variável $\mathbf{z}$ o sistema seria linear com y como saída e v como entrada.

Assim, como no caso da linearização exata por realimentação de estados, busca-se encontrar a transformação T que satisfaça:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial T_1}{\partial x_n}\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})\\
&\left[\frac{\partial T_2}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_2}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial T_2}{\partial x_n}\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_3(\mathbf{x})\\
&\vdots\\
&\left[\frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_1}\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x_n}\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

E, simultaneamente,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0 \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 0 \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \frac{\partial T_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= 1
\end{aligned} \tag{2}$$

As condições expressas em (1) e (2) são as mesmas usadas para encontrar a lei de realimentação de estado para linearização exata. Porém, para linearização entrada saída, deve-se impor a condição adicional:

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Pode não ser possível atender, simultaneamente, (1), (2) e (3). Nesse caso, requer-se procedimento diverso para realizar a linearização entrada saída.

Proposta de método

Definem-se as funções adicionais $\Psi_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq r+1$, tais que:

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = y = h(\mathbf{x})$$

$$\frac{dy}{dt} = \Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{d\Psi_1(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial\Psi_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\Psi_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial\Psi_1(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Psi_3(\mathbf{x}) = \frac{d\Psi_2(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial\Psi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\Psi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial\Psi_2(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ry}{dt^r} = \Psi_{r+1}(\mathbf{x}) = \frac{d\Psi_r(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial\Psi_r(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial\Psi_r(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial\Psi_r(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u$$

em que r é tal que:

$$\frac{\partial\Psi_i(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq r-1$$

$$\frac{\partial\Psi_r(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0$$

Assim, resulta que

$$\frac{d^r y}{dt^r} = \frac{\partial \Psi_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \Psi_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u.$$

Dessa forma, pode-se escolher a lei de controle:

$$u = \left[\frac{\partial \Psi_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})\right]^{-1}\left[v - \frac{\partial \Psi_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\right].$$

Resultando em

$$\frac{d^r y}{dt^r} = v. \tag{4}$$

Isto é, a relação entre a entrada v e a saída y passa a ser descrita por (4), que é linear. Neste caso, r é chamado de **grau relativo do sistema**. Pode-se mostrar que $r \leq n$.

Exemplo: Seja o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \\
y &= x_1^2
\end{aligned}
$$

Derivando-se y com respeito ao tempo:

$$\frac{dy}{dt} = 2x_1\dot{x}_1 = 2x_1x_2,$$

em que se nota que o sinal de controle não aparece, i. e., $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{x}} g = 0$. Seguimos com o processo derivando mais uma vez com respeito ao tempo:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} =& 2x_2\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_2 = 2x_2^2 + 2x_1[-x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u] \\
& 2x_2^2 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1^3x_2 + 2x_1u.
\end{aligned}
$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x_2^2 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1^3x_2 + 2x_1u.$$

Tomando

$$u = \frac{v - 2x_2^2 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3x_2}{2x_1} = \frac{v}{2x_1} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_1 - x_2 + x_1^2x_2, \quad (5)$$

tem-se

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v.$$

Tomando o estado aumentado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

a dinâmica fica

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ 2x_2^2 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1^3x_2 + 2x_1u \\ x_2 \\ -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Com a lei de controle (5):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ v \\ x_2 \\ \frac{v+2x_2^2}{2x_1} \end{bmatrix}.$$

Como resultado tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ v \\ x_2 \\ \frac{v+2x_2^2}{2x_1} \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

que expressa uma relação linear entre v e y, conforme buscado.

Exemplo: Admitamos a mesma dinâmica do caso anterior, com a saída diferente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + u$$
$$y = x_1 x_2$$

Derivando-se y com respeito ao tempo:

$$\frac{dy}{dt} = x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + (1 - x_1^2)x_1x_2 + x_1u,$$

em que se nota que o sinal de controle já aparece (o grau relativo é $r = 1$).

Tomando

$$u = \frac{v - x_2^2 + x_1^2 - (1 - x_1^2)x_1x_2}{x_1} = \frac{v - x_2^2}{x_1} + x_1 - x_2 + x_1^2x_2, \qquad (6)$$

tem-se

$$\frac{dy}{dt} = v.$$

Exemplo: Admitamos a mesma dinâmica do caso anterior, com a saída diferente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u\\ y &= x_1 x_2\end{aligned}$$

Derivando-se y com respeito ao tempo:

$$\frac{dy}{dt} = x_2\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + (1-x_1^2)x_1x_2 + x_1u,$$

em que se nota que o sinal de controle já aparece (o grau relativo é $r=1$).

Tomando

$$u = \frac{v - x_2^2 + x_1^2 - (1-x_1^2)x_1x_2}{x_1} = \frac{v - x_2^2}{x_1} + x_1 - x_2 + x_1^2x_2, \qquad (6)$$

tem-se

$$\frac{dy}{dt} = v.$$

Tomando o estado aumentado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

a dinâmica fica

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ x_2 \\ \frac{v - x_2^2}{x_1} \end{bmatrix},$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dinâmica zero

Assumindo grau relativo $r > 1$, sejam as transformações Φ e Ψ:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

tal que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0, \ 1 \leq i \leq n - r.$$

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{i+1} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}),\ 1 \leq i \leq r-1, \\
&\Psi_1 = h, \\
&\frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq r-1, \\
&\frac{\partial \Psi_r}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0,
\end{aligned}
$$

pode-se reescrever o sistema com o vetor de estado:

$$
\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{x}) \\ \Psi(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}.
$$

Com isto, resulta a dinâmica

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0(\eta,\xi) \\ \mathbf{f}_\xi(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n-r}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ A_B\xi + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r-1\times r} \\ \frac{\partial \Psi_r}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + B_B\frac{\partial \Psi_r}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})u \end{bmatrix}.$$

A dinâmica de

$$\dot{\eta} = \mathbf{f}_0(\eta,\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n-r}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

não afeta a saída, que depende exclusivamente de ξ.

A dinâmica de

$$\dot{\eta} = \mathbf{f}_0(\eta,\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n-r}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

quando $\xi = 0$, i. e, $\mathbf{f}_0(\eta,0)$ é chamada de **dinâmica zero**.
No caso de sistemas lineares, a estabilidade da dinâmica zero se relaciona ao fato de os zeros da função de transferência estarem no Semiplano Esquerdo (SPE). Assim, por analogia, diz-se que o sistema não linear é de **fase mínima** se a dinâmica zero é assintoticamente estável no domínio considerado.

Exemplo: Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= x_1 x_3 + u\\ y &= x_2^2\end{aligned}$$

Derivando-se y com respeito ao tempo:

$$\frac{dy}{dt} = 2x_2\dot{x}_2 = 2x_2x_3,$$

em que se nota que o sinal de controle não aparece, i. e., $\frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{x}} g = 0$. Seguimos com o processo derivando mais uma vez com respeito ao tempo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2(x_3\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_2) = 2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_2u.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_2u.$$

Fazendo-se:

$$u = \frac{v}{2x_2} - \frac{x_3^2 + x_1x_2x_3}{x_2},$$

Tem-se a linearização entrada saída, donde encontram-se:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \Psi_1(\mathbf{x}) = x_2^2 = y, \\
\xi_2 &= \Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 2x_2x_3 = \dot{y}.
\end{aligned}$$

Arbitrando

$$\phi_1(\mathbf{x}) = x_1,$$

resulta:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0.$$

Assim, a dinâmica do estado modificado é:

$$\dot{\eta} = \dot{\phi_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -x_1 + x_1 x_2 \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} = -\eta + \eta x_2 \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}$$

$$\dot{\xi}_1 = 2x_2x_3 = \dot{y} = \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = 2x_3^2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_2u = v$$

Para que se tenha $\xi = 0$, basta que $x_2 = 0$. Neste caso, tem-se

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) = -\eta,$$

que é assintoticamente estável, resultando que o sistema é de fase mínima.