Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 9 - Análise de estabilidade pelos métodos de Lyapunov [1]

Rubens J M Afonso

EE-209: Sistemas de controle não lineares

6 de setembro de 2017

[1] J. J. Slotine & W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Cap. 3, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991

Análise de estabilidade pelos métodos de Lyapunov

Há dois métodos de Lyapunov que permitem a análise de estabilidade para sistemas não lineares:

1. Primeiro método de Lyapunov ou método indireto: consiste em usar a linearização por série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio (PE) e analisar a estabilidade do sistema linear resultante. O resultado, porém, é válido em uma vizinhança desconhecida do PE. Permite justificar o emprego das técnicas de projeto de controladores para sistemas lineares sob a hipótese de que o comportamento do sistema permanece linear em uma vizinhança do PE.
2. Segundo método de Lyapunov ou método direto: utiliza-se uma função escalar auxiliar para analisar a estabilidade do sistema sem realizar aproximações. A vantagem é que as conclusões são válidas para conjuntos que podem ser bem determinados em torno do PE. Por outro lado, pode ser difícil encontrar uma função escalar adequada para realizar a análise.

Definições preliminares

Definição (Ponto de Equilíbrio – PE)

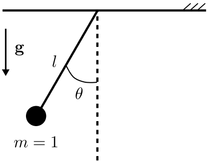
Seja o sistema não linear autônomo com vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

diz-se que $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de equilíbrio (PE) de (1) se:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

Exemplo: Pêndulo de haste rígida.



$$ml\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Escolhendo:

$$x_1 = \theta,$$
$$x_2 = \dot{\theta},$$

têm-se

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,x_1.$$

Assim,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \to \begin{array}{r} \bar{x}_2 = 0 \\ \operatorname{sen}\bar{x}_1 = 0 \end{array}.$$

Desse modo, há infinitos PE:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Um PE pode ser **estável** ou **instável**.

Definição (Estabilidade local no sentido de Lyapunov)

Diz-se que um PE $\bar{\mathbf{x}}$ é estável se existem uma bola de raio $r > 0$ centrada em $\bar{\mathbf{x}}$, denotada por $\mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \, \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq r\}$, e outra bola $\mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$, tais que qualquer trajetória iniciada em $\mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}})$ sempre permaneça em $\mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$.

Formalmente:

$\forall R,\, 0 < R < M,\, \forall t \geq 0,\, \exists r$ tal que $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$ [a].

---

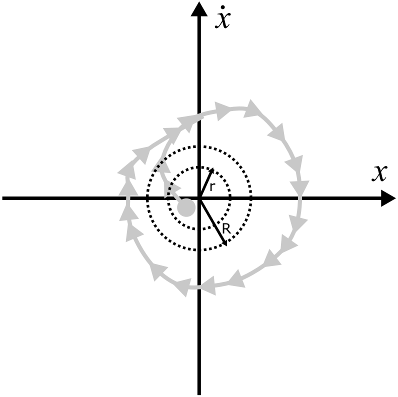
[a] Sempre é possível transladar o PE para a origem mediante a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}$ em (1), obtendo $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} + \cancelto{0}{\dot{\bar{\mathbf{x}}}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\mathbf{y})$. Adicionalmente, note que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Assim, podemos nos limitar a analisar a estabilidade da origem de sistemas.

Definição (Instabilidade)

Diz-se que um PE é instável quando não é estável.

Exemplo: Instabilidade do oscilador de Van der Pol.

No plano de fase:



Pela figura, vemos que $\nexists r$, $\forall R$, $0 < R < M$, $\forall t \geq 0$, tal que $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(\bar{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$

Definição (Estabilidade assintótica)

A origem é assintoticamente estável se é estável e $\|\mathbf{x}(t)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, i. e., as trajetórias ficam arbitrariamente próximas à origem à medida em que o tempo aumenta.

Definição (Estabilidade exponencial)

A origem é exponencialmente estável se, além de assintoticamente estável, $\exists\alpha,\ \lambda > 0$ tais que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Ou seja, não só as trajetórias ficam arbitrariamente próximas à origem à medida em que o tempo aumenta, a distância é limitada superiormente por uma exponencial decrescente com o tempo.

Primeiro método de Lyapunov

Vimos na Aula 6 que, se $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ for continuamente diferenciável, pode-se expandir em série de Taylor em torno de $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}). \tag{2}$$

Expandindo o termo do lado direito de (2) em série de Taylor em torno de $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right). \tag{3}$$

Em que $O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right)$ contém termos de ordem maior. Então,

$$\cancelto{0}{\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{x}}} + \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \cancelto{0}{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}} \delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right).$$

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{x} + O\left(\|\delta\mathbf{x}\|^2\right).$$

Na vizinhança do PE, pode-se negligenciar a contribuição dos termos de ordem mais elevada frente à dos termos de ordem 1, resultando que o comportamento do sistema é aproximadamente ditado por:

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{x} = \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}\delta\mathbf{x} = A\delta\mathbf{x}.$$

No primeiro método de Lyapunov os autovalores da matriz $A = \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}}$ são usados para concluir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Teorema (Primeiro método de Lyapunov – método indireto)

Sejam λ_i, $1 \leq i \leq n$ *os* n *autovalores de* A, *então:*

- i *O PE é assintoticamente estável se* $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0$, $1 \leq i \leq n$.
- ii *O PE é instável se* $\exists i \in \{1,2,\ldots,n\} | \mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0$.
- iii *Nada se pode afirmar se* $\exists i \in \{1,2,\ldots,n\} | \mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0$ *e* $\nexists j \in \{1,2,\ldots,n\} | \mathrm{Re}\{\lambda_j\} > 0$.

Exemplo: Para o pêndulo de haste rígida

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\operatorname{sen} x_1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Têm-se dois tipos de pontos de equilíbrio diferentes, quando $\bar{x}_1 = 2k\pi$ e quando $\bar{x}_1 = (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Analisando cada caso:

$\bar{x}_1 = 0$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_0) = \lambda^2 + \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Nada se pode afirmar.

$\bar{x}_1 = \pi$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 - \frac{g}{l}$$

Autovalores

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

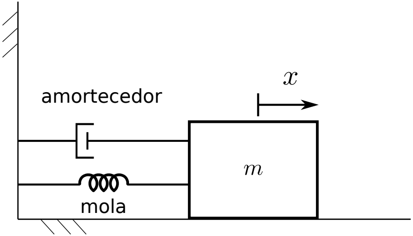
$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Instável

Segundo método de Lyapunov – método direto

O segundo método de Lyapunov permite analisar a estabilidade a partir da definição de uma função escalar "tipo energia" associada ao sistema (1).

Exemplo motivador: Massa-mola-amortecedor



Mola não linear e amortecedor:

$$m\ddot{x} = -kx^3 - b\dot{x}|\dot{x}|.$$

Energia cinética

$$E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Energia potencial

$$E_p = \int_0^x k\xi^3 d\xi = \frac{kx^4}{4}.$$

Energia mecânica

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{4}.$$

Variação temporal da energia:

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx^3\dot{x} = \dot{x}(-kx^3 - b\dot{x}|\dot{x}| + kx^3) = -b\dot{x}^2|\dot{x}| \leq 0.$$

Variação temporal da energia:

$$\frac{dE_m}{dt} = -b\dot{x}^2|\dot{x}| \leq 0.$$

A energia mecânica não aumenta. Ao contrário, é dissipada (derivada negativa) até que $\dot{x} = 0$, isto é, até que a massa pare.
O segundo método de Lyapunov fornece condições sobre a função escalar associada (que pode se assemelhar à energia ou não) e suas derivadas para que se possa analisar a estabilidade de um PE.

Definição (Função positivo definida – PD)

Uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser localmente positivo definida (PD) se

$$
\begin{aligned}
&V(\mathbf{x}) > 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R(0), \ \mathbf{x} \neq 0, \\
&V(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Se

$$
\begin{aligned}
&V(\mathbf{x}) > 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x} \neq 0, \\
&V(0) = 0,
\end{aligned}
$$

então V é dita ser globalmente PD.

Definição (Função negativo definida – ND)

Uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser localmente/globalmente negativo definida (ND) se $-V$ é localmente/globalmente positivo definida.

Exemplos:

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$
$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$

Exemplos:

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$
$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$

A função $V(\mathbf{x}) = x_1^2$, com $\mathbf{x}^T = [x_1 \;\; x_2]$ é PD?

Exemplos:

$$V(x) = x^2 \text{ globalmente PD}$$
$$V(x) = -|x| \text{ globalmente ND}$$

A função $V(\mathbf{x}) = x_1^2$, com $\mathbf{x}^T = [x_1 \;\; x_2]$ é PD?

Não, porque $\exists \mathbf{x} \neq 0 | V(\mathbf{x}) = 0$, pois $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow V(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \;\forall x_2 \in \mathbb{R}$.

Definição (Função positivo semidefinida – PSD)

Uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser localmente positivo semidefinida (PD) se

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R(0).$$

Se

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

então V é dita ser globalmente PSD.

Definição (Função negativo semidefinida – NSD)

Uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser localmente/globalmente negativo semidefinida (NSD) se $-V$ é localmente/globalmente positivo semidefinida.

Definição (Função de Lyapunov)

Uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é dita ser uma função de Lyapunov para (1) se tiver derivadas parciais contínuas e

- V é PD;
- $\dot{V}$ é NSD.

Teorema (Segundo método de Lyapunov – versão local)

Se em uma bola $\mathcal{B}_R(0)$ *existir uma função de Lyapunov* $V(\mathbf{x})$ *para o sistema* (1), *então a origem é ponto de equilíbrio (PE) estável de* (1). *Se* $\dot{V}$ *for ND, a origem é PE assintoticamente estável em* $\mathcal{B}_R(0)$.

Demonstração.

Seja a esfera de raio R centrada na origem denotada por $\mathcal{S}_R(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \|\mathbf{x}\| = R\}$. A função V é contínua, portanto possui um valor mínimo $m > 0$ em $\mathcal{S}_R(0)$. Existe uma bola $\mathcal{B}_r(0)$ tal que $V(\mathbf{x}) < m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_r(0)$, visto que V é contínua e $V(0) = 0$. Como $\dot{V} \leq 0$, V não pode crescer com o tempo. Uma vez que $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(0) \Rightarrow V(\mathbf{x}(0)) < m$, V nunca pode ultrapassar o valor m. Por consequência, $\mathbf{x}(t)$ não pode cruzar a esfera $\mathcal{S}_R(0)$, pois isso requer que $V(\mathbf{x}(t)) \geq m$. Assim: $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}_r(0),\ \mathbf{x}(t) \in \mathcal{B}_R(0)$, precisamente a definição de estabilidade aplicada à origem.

$\square$

Voltando ao exemplo do massa-mola-amortecedor e definindo Energia mecânica

$$V(\mathbf{x}) = E_m = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^4}{4} \text{ (PD)},$$

em que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Variação temporal da energia:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dE_m}{dt} == -b\dot{x}^2|\dot{x}| \text{ (NSD)}.$$

Aplicando teorema, conclui-se que a origem é PE (localmente) estável.

Teorema (Segundo método de Lyapunov – versão global)

Seja uma função de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ *para o sistema* (1)*, se:*

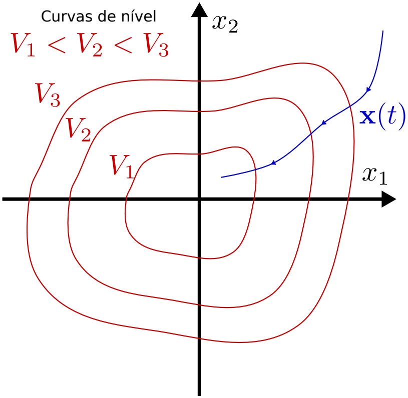
- $V(\mathbf{x}) \underset{\|\mathbf{x}\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *(radialmente ilimitada – RI),*

então a origem é ponto de equilíbrio (PE) globalmente estável de (1)*.*
Se $\dot{V}$ *for ND, a origem é PE globalmente assintoticamente estável.*

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ sejam fechadas, evitando que a função V tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.

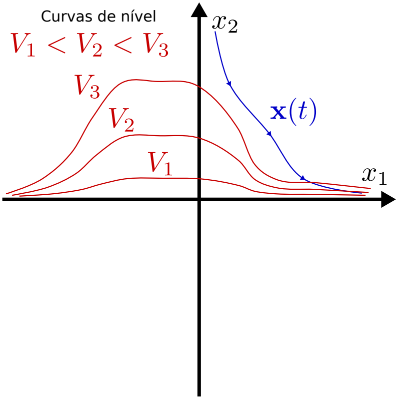
Necessidade de ser RI – interpretação geométrica

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ sejam fechadas, evitando que a função V tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.



Necessidade de ser RI – interpretação geométrica

A premissa adicional impõe que as curvas de nível de $V(\mathbf{x})$ sejam fechadas, evitando que a função V tenda a zero mesmo que o estado se distancie da origem.



Exemplo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2),\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2),$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

A origem é PE.
Arbitrando:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \text{ (PD e RI)},$$
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \cancel{x_1x_2} - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \cancel{- x_1x_2} - x_2^2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$- (x_1^2 + x_2^2)^2 \text{ (ND)}.$$

Aplicando teorema, conclui-se que a origem é PE globalmente assintoticamente estável.

Conjuntos invariantes

Finalidades:

- demonstrar que o PE é **assintoticamente** estável mesmo quando $\dot{V} \leq 0$ (NSD);
- demonstrar convergência par um conjunto não trivial.

Definição

Diz-se que um conjunto $G \in \mathbb{R}^n$ é invariante para um determinado sistema dinâmico (1) se todas as trajetórias iniciadas em G permanecem em G por todo o tempo.

Example (triviais)

PE, 1 trajetória específica e ciclo limite.

Teorema (LaSalle: local)

Sejam um sistema dinâmico (1) *(com $\mathbf{f}$ contínua) e uma função escalar $V(\mathbf{x})$. Admita que:*

- *para algum $l > 0$, a região $\Omega_l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < l\}$ é limitada* [a]*;*
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_l$.

Sejam também $\mathcal{R} = \left\{\mathbf{x} \in \Omega_l : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\right\}$ e o "maior" [b] *conjunto invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$.*
Então, todas as trajetórias em Ω_l convergem para $\mathcal{M}$ quando $t \to \infty$.

[a] contida em uma bola de raio finito
[b] união de todos os conjuntos invariantes em $\mathcal{R}$

Este teorema reflete a noção de que $\dot{V}(\mathbf{x}) \to 0$, dado que $V(\mathbf{x})$ é limitada inferiormente por 0 e Ω_l é limitado.

Exemplo: Massa-mola-amortecedor
Relembrando:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{4}kx_1^4, \text{ em que } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases},$$
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3.$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$ é NSD, assim não conseguimos demonstrar que a origem é **assintoticamente** estável.
Porém:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pela expressão de $V(\mathbf{x})$:

$$\Omega_l = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{4}kx_1^4 < l \right\}.$$

Tomemos uma transformação $y_1 = \frac{x_1\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}$, $y_2 = \frac{x_2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$:

$$\Omega_l = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{y}) = y_1^4 + y_2^2 < l\right\}.$$

Tomemos a bola $\mathcal{B}_R(0) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq R\right\}$. Assim, tem-se que, $\forall \mathbf{y} \in \Omega_l$:

$$(y_1^2 + y_2^2) - (y_1^4 + y_2^2) = y_1^2(1 - y_1^2) \leq \frac{1}{4},$$
$$(y_1^2 + y_2^2) \leq (y_1^4 + y_2^2) + \frac{1}{4} < l + \frac{1}{4} \leq R, \forall R \geq l + \frac{1}{4}$$

Assim, $\Omega_l \subset \mathcal{B}_R(0), \forall R \geq l + \frac{1}{4} \Rightarrow \Omega_l$ limitado.

Então:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \Omega_l : V(\mathbf{x}) = 0\} = \left\{\mathbf{x} \in \Omega_l : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall x_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Voltando à EDO, em $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx^3 - \cancelto{0}{b\dot{x}|\dot{x}|}, \\ m\ddot{x} &= -kx^3, \\ m\dot{x}_2 &= -kx_1^3 \underset{x_2(t)=0}{\longrightarrow} x_1 = 0. \end{aligned}$$

Desta forma: $\mathcal{M} = \left\{\mathbf{x} \in \Omega_l : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Pelo teorema de LaSalle, as trajetórias devem convergir **assintoticamente** para a origem ($\mathcal{M}$).

Teorema (LaSalle: global)

Sejam um sistema dinâmico (1) *(com* $\mathbf{f}$ *contínua) e uma função escalar* $V(\mathbf{x})$ *com as primeiras derivadas parciais contínuas. Admita que:*

- $V(\mathbf{x}) \underset{\|\mathbf{x}\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$;
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sejam também $\mathcal{R} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\right\}$ *e o "maior" conjunto invariante* $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$.

Então, todas as trajetórias convergem para $\mathcal{M}$ *quando* $t \to \infty$.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_2^3,\\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 x_2 - x_2^3.\end{aligned}$$

Seja:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \text{ (PD, RI)},$$

então,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) =& x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2^3 - x_1^2x_2^2 - x_2^4 = x_2^2(2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2)\\ & - x_2^2(x_1 - x_2)^2 \leq 0 \text{ (NSD)}.\end{aligned}$$

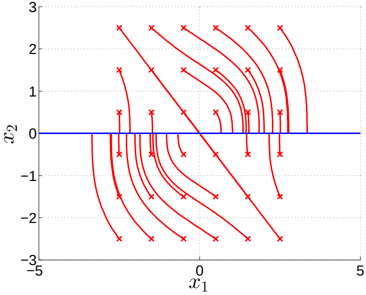
Encontrando $\mathcal{R}$:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \; x_2 = 0 \qquad\qquad x_1 = x_2 = y$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2y^3 \\ \dot{x}_2 = -2y^3 \end{cases}$$

invariante anula $\dot{\mathbf{x}}$ em $y = 0$ (origem).

Assim, $\mathcal{M} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, e qualquer trajetória converge assintoticamente para a reta $x_2 = 0$.



Método de Krasovskii

Teorema (Krasovskii)

Sejam o sistema autônomo (1) *com apenas a origem como PE e:*

$$A(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

a matriz jacobiana associada. Se a matriz $F = A^T + A$ *for ND em uma vizinhança* Ω [a] *da origem, então a origem é PE assintoticamente estável e*

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

é uma função de Lyapunov para o sistema (1).

[a] se, adicionalmente, $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $V(\mathbf{x}) \underset{\|\mathbf{x}\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, então a origem é PE globalmente assintoticamente estável

Demonstração.

Da definição

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq 0 \tag{4}$$

Do enunciando, apenas a origem é PE, então:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \tag{5}$$

De (4) e (5), conclui-se que $V(\mathbf{x})$ é PD.

$\square$

Continuação.

Calculando a derivada com respeito ao tempo:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) =& \dot{\mathbf{f}}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}\right]^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{f}^T(\mathbf{x})A^T\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})A\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})[A^T + A]\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{f}^T(\mathbf{x})F\mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Como $V(\mathbf{x})$ é PD e $\dot{V}(\mathbf{x})$ é ND, aplicando o segundo método de Lyapunov, conclui-se que a origem é assintoticamente estável. □