EE-209 / Segundo Semestre de 2017

Lista 2

1 – A equação de *Lotka-Volterra* (presa-predador) é frequentemente utilizada para representar as populações de duas espécies, uma desempenhando o papel de presa e a outra, de predador:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2 \end{cases}, \tag{1}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Fazendo $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $\delta = 3$, pede-se:

a) identifique qual variável representa a população de predadores, justificando;

b) encontre os pontos de equilíbrio de (1);

c) mostre, pelo Primeiro Método de Lyapunov, que as trajetórias não convergem para a origem para $x_1(0) \neq 0$ e $x_2(0) \neq 0$.

2 – Seja a equação do sistema dinâmico

$$\ddot{x} + [2a + (\dot{x})^2]\dot{x} + \nu^2 x = 0,\ \nu \neq 0, \tag{2}$$

um caso particular da chamada Equação de Liénard. Analise, pelos Métodos de Lyapunov, a estabilidade da origem (pode ser necessária a utilização do Teorema de LaSalle) de acordo com o valor do parâmetro a.

3 – No artigo "Closed Loop Steering of Unicycle-like Vehicles via Lyapunov Techniques", *IEEE Robotics & Automation Magazine*, v. 2, n. 1, 1995, pp. 27 - 35, (você pode baixar no ITA) os autores utilizam a "Lyapunov-like analysis" para obter uma lei de controle que faça o robô convergir assintoticamente para a posição desejada com a orientação requerida. Na seção "Closed Loop Steering" esta demonstração é apresentada. Contudo, vários lapsos são cometidos nessa demonstração, em particular da Eq. (5) até a Eq. (12). Pede-se:

a) Verifique as Eqs. (5) até (12), indicando claramente as que estiverem corretas e corrigindo as que contiverem lapsos;

b) Utilize o Teorema de LaSalle com os resultados do Item a) para demonstrar a convergência assintótica do robô para a posição e a orientação desejadas, validando a lei de controle proposta e os resultados do artigo.

4 – Seja o sistema não-linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 cos(x_1) - x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - (1 - x_2^2) x_1^4 x_2 \end{cases}.$$

a) Utilize o Primeiro Método de Lyapunov para mostrar que a origem é um ponto de equilíbrio estável;

b) Utilize como candidata a função de Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ para obter a "maior" vizinhança da origem em que esta é assintoticamente estável. Entenda "maior" no sentido de medida do conjunto.