



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 10 - Resposta em frequência de sistemas lineares

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

29 de março de 2018

Motivação

- Aulas anteriores: obter um modelo matemático em termos da função de transferência do sistema, a partir de princípios físicos;



Motivação

- Aulas anteriores: obter um modelo matemático em termos da função de transferência do sistema, a partir de princípios físicos;
- O que fazer quando não se tem acesso a um modelo baseado em princípios físicos? Por exemplo:
 - Sistema é muito complexo;
 - Não se tem acesso a todos os subsistemas para saber quais são os circuitos/reações químicas ou dispositivos mecânicos envolvidos.



Motivação

- Aulas anteriores: obter um modelo matemático em termos da função de transferência do sistema, a partir de princípios físicos;
- O que fazer quando não se tem acesso a um modelo baseado em princípios físicos? Por exemplo:
 - Sistema é muito complexo;
 - Não se tem acesso a todos os subsistemas para saber quais são os circuitos/reações químicas ou dispositivos mecânicos envolvidos.
- Como fazer o projeto sem dispor da função de transferência do sistema?



Motivação

- Aulas anteriores: obter um modelo matemático em termos da função de transferência do sistema, a partir de princípios físicos;
- O que fazer quando não se tem acesso a um modelo baseado em princípios físicos? Por exemplo:
 - Sistema é muito complexo;
 - Não se tem acesso a todos os subsistemas para saber quais são os circuitos/reações químicas ou dispositivos mecânicos envolvidos.
- Como fazer o projeto sem dispor da função de transferência do sistema?
- Uma resposta: **Resposta em Frequência.**



Breve histórico

- Técnicas desenvolvidas nas décadas de 1920, 30 e 40, por cientistas como Black, Nyquist e Bode;
- Problema estudado nos Laboratórios Bell: amplificar um sinal elétrico para transmitir através de cabos nos Estados Unidos;
- Não se dispunha do poder computacional: necessário fazer os projetos sem muitos cálculos intrincados, através de gráficos e experimentos;
- Projeto usando a resposta em frequência tem formulação matemática simples;
- Até hoje, técnicas estão entre as mais utilizadas na indústria.



Obtendo a resposta em frequência experimentalmente

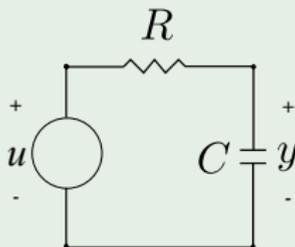
- Restrições: sistemas LIT estáveis em malha aberta.

Example 1.

- Circuito RC: resistor $R = 470k\Omega$ e capacitor $C = 220nF$.
- Entrada de tensão senoidal com amplitude A e frequência ω :

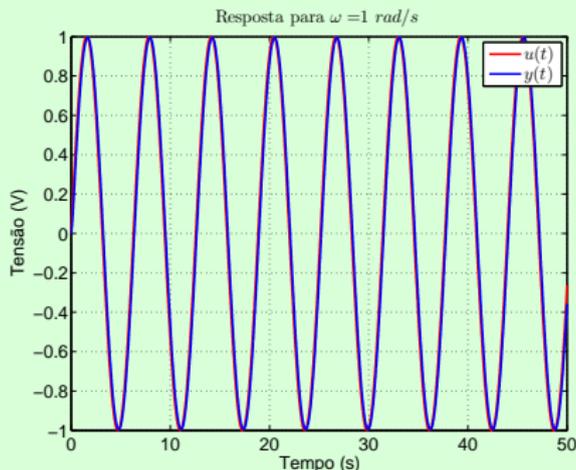
$$u(t) = A \text{sen}(\omega t). \quad (1)$$

- Frequência ω variada: observar a saída $y(t)$ do sistema para diferentes frequências.



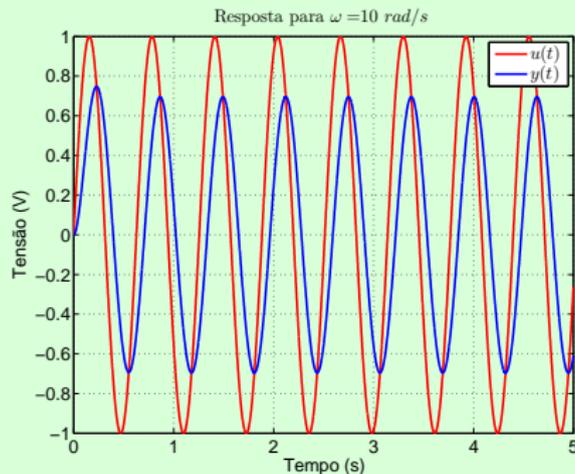
Exemplo 1 - continuação

- Frequência relativamente baixa $\omega = 1 \text{ rad/s}$;
- Após um tempo:
 - 1 a tensão de saída também é uma senoide **com a mesma frequência** da entrada;
 - 2 *quase* a mesma fase;
 - 3 *quase* a mesma amplitude.



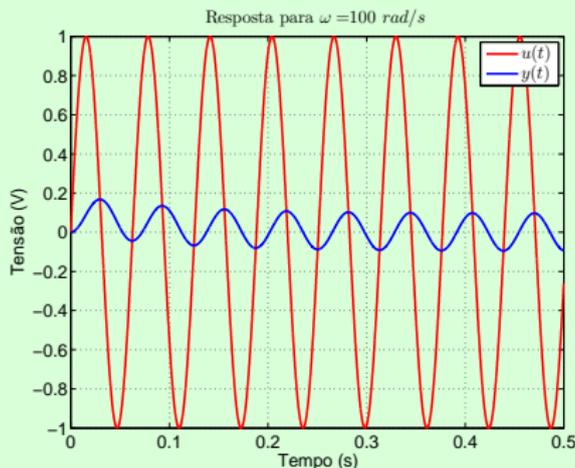
Exemplo 1 - continuação

- Frequência $\omega = 10 \text{ rad/s}$;
- Após um tempo:
 - 1 a tensão de saída também é uma senoide **com a mesma frequência** da entrada;
 - 2 fase diferente;
 - 3 amplitude diferente.



Exemplo 1 - continuação

- Frequência $\omega = 100 \text{ rad/s}$;
- Após um tempo:
 - 1 a tensão de saída também é uma senoide **com a mesma frequência** da entrada;
 - 2 fase *muito* diferente;
 - 3 amplitude *muito* diferente.



Pergunta

Por que a saída $y(t)$ do sistema conseguia seguir relativamente bem a entrada $u(t)$ para uma frequência ω baixa e, conforme a frequência aumenta, esse seguimento fica cada vez pior?

Construção da resposta

- O modelo entrada-saída do sistema pode ser escrito em termos de sua função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}, \quad (2)$$

para um sistema sem zeros e com polos reais não repetidos.

- Para que o sistema seja estável, devemos ter $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$.
- Transformada de Laplace da entrada senoidal:

$$\mathcal{L}\{A \operatorname{sen}(\omega t)\} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$



Construção da resposta - continuação

- Expandir a transformada de Laplace de $Y(s)$ em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} + \frac{a_0}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}_0}{s+j\omega}. \quad (4)$$



Construção da resposta - continuação

- Expandir a transformada de Laplace de $Y(s)$ em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} + \frac{a_0}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}_0}{s+j\omega}. \quad (4)$$

- Transformada Inversa de Laplace: resposta será uma somatória de exponenciais com expoentes negativos devido aos polos, com exceção da resposta devida à entrada senoidal

$$y(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} + a_0 e^{j\omega t} + \bar{a}_0 e^{-j\omega t}. \quad (5)$$



Construção da resposta - continuação

- Expandir a transformada de Laplace de $Y(s)$ em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} + \frac{a_0}{s-j\omega} + \frac{\bar{a}_0}{s+j\omega}. \quad (4)$$

- Transformada Inversa de Laplace: resposta será uma somatória de exponenciais com expoentes negativos devido aos polos, com exceção da resposta devida à entrada senoidal

$$y(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} + a_0 e^{j\omega t} + \bar{a}_0 e^{-j\omega t}. \quad (5)$$

- Os termos envolvendo expoentes imaginários podem ser aglomerados:

$$a_0 e^{j\omega t} + \bar{a}_0 e^{-j\omega t} = 2 \operatorname{Re} \{a_0\} \cos(\omega t) - 2 \operatorname{Im} \{a_0\} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (6)$$



Construção da resposta - continuação

$$y(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} + \\ + 2 \operatorname{Re} \{a_0\} \cos(\omega t) - 2 \operatorname{Im} \{a_0\} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (7)$$



Construção da resposta - continuação

$$y(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} + 2 \operatorname{Re} \{a_0\} \cos(\omega t) - 2 \operatorname{Im} \{a_0\} \operatorname{sen}(\omega t). \quad (7)$$

- Tempo suficientemente grande ($t \rightarrow \infty$):
 - termos associados aos polos do sistema tenderão a zero, não influenciando mais na resposta, porque os seus expoentes são negativos;
 - termos associados ao seno e ao cosseno permanecem;
 - a saída será determinada pela senoide:

$$y(t) = 2|a_0| \operatorname{sen}(\omega t + \phi + \pi/2), \quad (8)$$

em que a chamada fase ϕ é dada por:

$$\phi = \operatorname{atan} \left(\frac{\operatorname{Im} \{a_0\}}{\operatorname{Re} \{a_0\}} \right). \quad (9)$$



Construção de resposta - continuação

- A saída será também uma senoide de frequência ω ;
- Amplitude e sua fase serão determinadas pela amplitude e pela fase de a_0 ;
- Para obter a_0 basta multiplicar $Y(s)$ por $s - j\omega$ e tomar o limite com $s \rightarrow j\omega$:

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)Y(s) \quad (10)$$

- Entrada senoidal:

$$Y(s) = G(s)A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11)$$

- Voltando ao limite na equação (10):

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)Y(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s)A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{G(j\omega)}{2j}A. \quad (12)$$



Construção da resposta - continuação

$$|a_0| = \left| \frac{G(j\omega)}{2j} A \right| = \frac{A}{2} |G(j\omega)|. \quad (13)$$



Construção da resposta - continuação

$$|a_0| = \left| \frac{G(j\omega)}{2j} A \right| = \frac{A}{2} |G(j\omega)|. \quad (13)$$

$$\phi = \angle \left[\frac{G(j\omega)}{2j} A \right] = \angle G(j\omega) + \angle A - \angle 2j = \angle G(j\omega) - \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$



Construção da resposta - continuação

$$|a_0| = \left| \frac{G(j\omega)}{2j} A \right| = \frac{A}{2} |G(j\omega)|. \quad (13)$$

$$\phi = \angle \left[\frac{G(j\omega)}{2j} A \right] = \angle G(j\omega) + \angle A - \angle 2j = \angle G(j\omega) - \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

$$y(t) = |G(j\omega)| A \text{ sen} [\omega t + \angle G(j\omega)]. \quad (15)$$



Construção da resposta - continuação

- Após um certo tempo, a saída para uma entrada senoidal de frequência ω e amplitude A :
 - senoide de frequência ω ;
 - amplitude $|G(j\omega)|A$;
 - defasada de $\angle G(j\omega)$.
- Chamado **regime permanente senoidal**;
- Confirma o observado no circuito RC:
- $\uparrow \omega \Rightarrow \downarrow$ amplitude $\Rightarrow \uparrow$ defasagem..



Exemplo 1 - continuação

Função de transferência do circuito RC:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{sRC + 1}. \quad (16)$$

$R = 470k\Omega$ e $C = 220nF$:

$$G(s) = \frac{1}{0,1034s + 1}. \quad (17)$$



Exemplo 1 - continuação

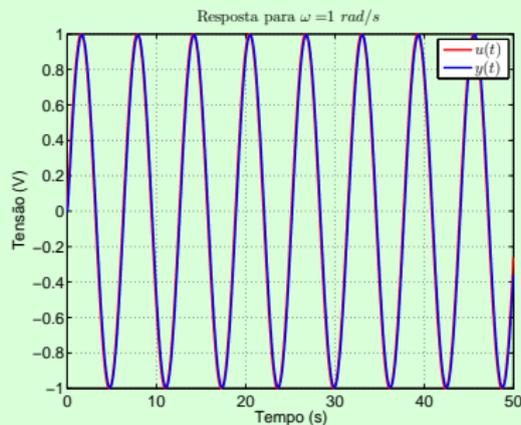
Calculando o módulo e a fase de $G(j\omega)$ para $\omega = 1 \text{ rad/s}$, $\omega = 10 \text{ rad/s}$ e $\omega = 100 \text{ rad/s}$

$\omega \text{ [rad/s]}$	$G(j\omega)$	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega) \text{ [rad]}$
1	$0,99 - 0,10j$	0,99	-0,10
10	$0,48 - 0,50j$	0,70	-0,80
100	$0,009 - 0,096j$	0,1	-1,47



Exemplo 1 - continuação

Para entradas senoidais de amplitude 1 [V] e fase 0:

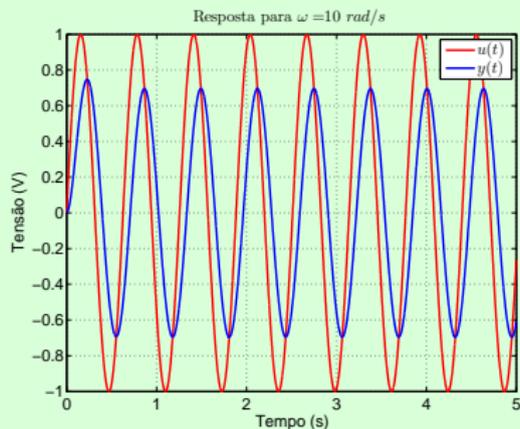


ω [rad/s]	$u(t)$	$y(t)$
1	$\text{sen}(t)$	$0,99 \text{sen}(t - 0,10)$
10		
100		



Exemplo 1 - continuação

Para entradas senoidais de amplitude 1 [V] e fase 0:

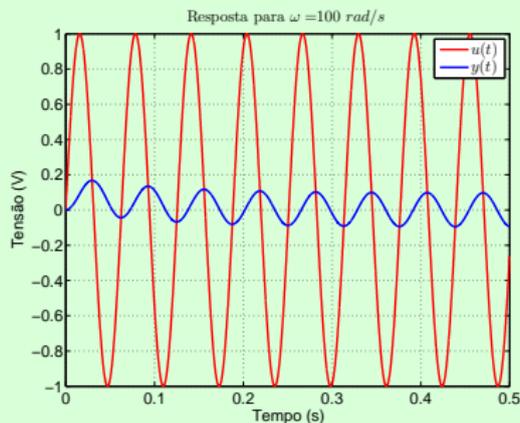


ω [rad/s]	$u(t)$	$y(t)$
1	$\text{sen}(t)$	$0,99 \text{sen}(t - 0,10)$
10	$\text{sen}(10t)$	$0,70 \text{sen}(10t - 0,80)$
100		



Exemplo 1 - continuação

Para entradas senoidais de amplitude 1 [V] e fase 0:



ω [rad/s]	$u(t)$	$y(t)$
1	$\text{sen}(t)$	$0,99 \text{sen}(t - 0,10)$
10	$\text{sen}(10t)$	$0,70 \text{sen}(10t - 0,80)$
100	$\text{sen}(100t)$	$0,01 \text{sen}(100t - 1,47)$



Conclusão

- Entradas senoidais de frequência ω e sistema LIT e estável: determinar saída em regime permanente senoidal conhecendo $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$.
- Pode ser obtido a partir de:
 - 1 função de transferência;
 - 2 experimentos com sinais senoidais de entrada com diversas frequências.

