



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 12 - Especificações de desempenho no domínio da frequência

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

4 de abril de 2018

- Uso da resposta em frequência requer tradução dos requisitos de desempenho usualmente dados no domínio do tempo;
- Na aula 11, para sistemas de segunda ordem com par de polos complexos conjugados de parte real negativa:
 - sobressinal M_p domínio do tempo \Rightarrow fator de amortecimento ξ_{MA}
 \Rightarrow pico de ressonância $M_{p\omega}$;
 - tempo de resposta \Rightarrow frequência natural ω_{nMA} desejada \Rightarrow banda de passagem.

Problema

- Frequentemente não dispomos da resposta em frequência em malha fechada do sistema e precisa-se antes projetar o controlador para fechar a malha;
- Relacionar a resposta em frequência de malha aberta diretamente com os requisitos de desempenho no domínio do tempo, através do fator de amortecimento ξ_{MA} e da frequência natural ω_{nMA} que o sistema deve apresentar em malha fechada.



Margem de fase PM e fator de amortecimento ξ_{MA}

Relembrando as definições das margens de estabilidade:

- margem de fase – PM (do inglês “Phase Margin”) – ocorre quando o ganho é unitário, na frequência ω_c

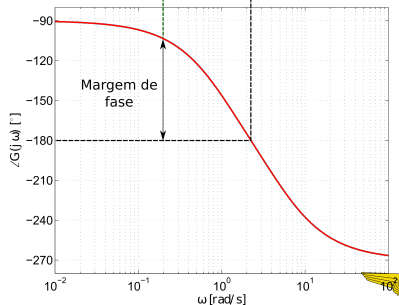
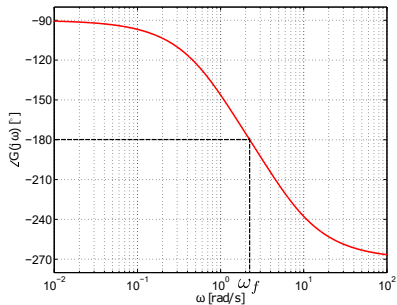
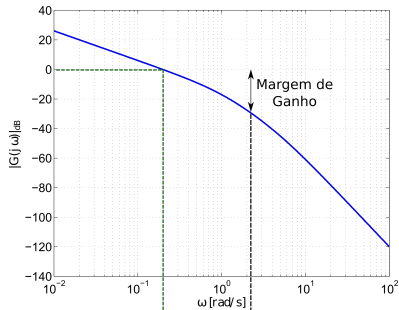
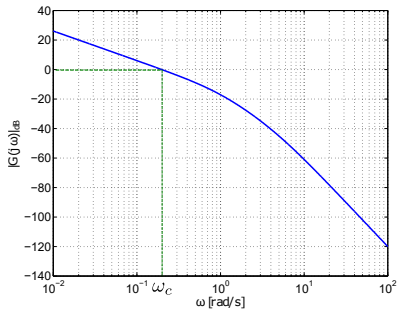
$$|G(j\omega_c)| = 1; \quad (1)$$

- margem de ganho – GM (do inglês “Gain Margin”) – ocorre na frequência ω_f em que a fase é -180°

$$\angle G(j\omega_f) = -180^\circ. \quad (2)$$

A frequência ω_c é chamada **frequência de cruzamento de 0 dB**, ou simplesmente **frequência de cruzamento**.





Observação 1.

Com ganho em dB o módulo unitário equivale a 0 dB.

$$PM = \angle G(j\omega_c) + 180^\circ = 77^\circ, \quad (3)$$

$$GM = |G(j\omega_f)|_{dB} = 30 \text{ dB}, \quad (4)$$



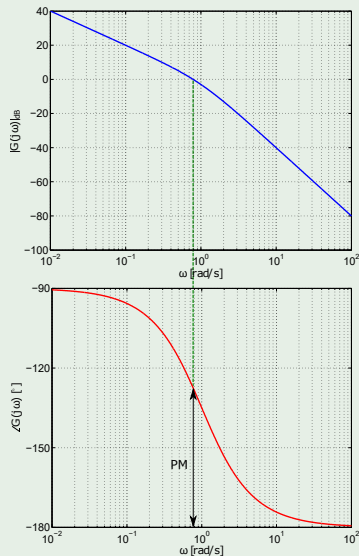
Example 1.

Considere o seguinte sistema, cuja função de transferência em malha aberta é dada por:

$$G(s) = \frac{\omega_{nMA}^2}{s(s + 2\xi_{MA}\omega_{nMA})}, \quad (5)$$

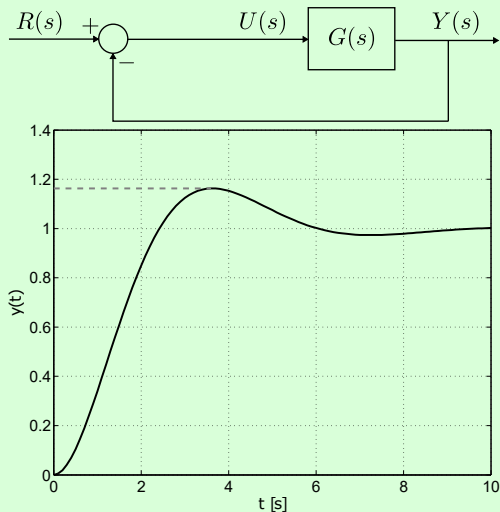
com $0 < \xi_{MA} < 1$.

- Diagrama de Bode para esse sistema para valores de $\omega_{nMA} = 1 \text{ rad/s}$ e $\xi_{MA} = 0,5$;
- $\omega_c = 0,8 \text{ rad/s}$ e $PM \approx 50^\circ$.



Exemplo 1 - continuação

Fechando a malha com realimentação unitária:



Exemplo 1 - continuação

$M_p \approx 16\%$ (entrada degrau unitário) $\rightarrow \xi_{MF} = 0,5$, pois

$$M_p = e^{-\frac{\pi\xi_{MF}}{\sqrt{1-\xi_{MF}^2}}} = e^{-\frac{\pi \cdot 0,5}{\sqrt{0,75}}} = 0,16. \quad (6)$$

Pergunta

O que acontece se multiplicarmos $G(s)$ por um ganho $K > 0$?

Observação 2.

Note que, com ganho unitário, como neste caso, em malha fechada:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_{nMA}^2}{s^2 + 2\xi_{MA}\omega_{nMA}s + \omega_{nMA}^2} = \frac{\omega_{nMF}^2}{s^2 + 2\xi_{MF}\omega_{nMF}s + \omega_{nMF}^2}.$$



$$|KG(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + |G(j\omega)|_{dB} = 20\log(K) + |G(j\omega)|_{dB} \quad (7)$$

- diagrama de Bode de ganho é o mesmo de $G(j\omega)$ mas transladado de $20\log(K)$.

$$\angle KG(j\omega) = \overset{0}{\angle K} + \angle G(j\omega) = \angle G(j\omega), \quad (8)$$

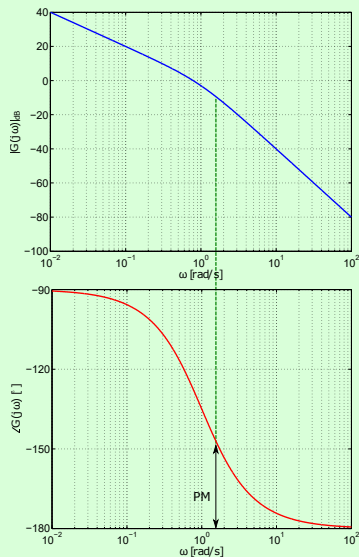
- gráfico de fase não se altera.



Exemplo 1 - continuação

$$G_2(s) = 3G(s) = 3 \frac{\omega_{nMA}^2}{s(s + 2\xi_{MA}\omega_{nMA})} \quad (9)$$

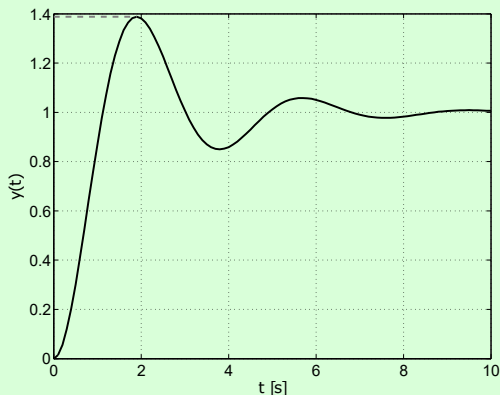
- Diagrama de Bode da amplitude é deslocado de $20\log(3) = 9,5 \text{ dB}$ para cima;
- Nova ω_c será aquela que antes cruzava $-9,5 \text{ dB}$;
- Nova $PM \approx 30^\circ$.



Exemplo 1 - continuação

Resposta no tempo em malha fechada $M_p \approx 38\% \rightarrow \xi_{MF} \approx 0,3$:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi_{MF}}{\sqrt{1-\xi_{MF}^2}}} = e^{\frac{-\pi 0,3}{\sqrt{0,91}}} = 0,37. \quad (10)$$



Relação entre malha aberta e malha fechada

Quando o ganho $K > 0$ é qualquer:

$$KG(s) = \frac{K\omega_{nMA}^2}{s(s + 2\xi_{MA}\omega_{nMA})}, \quad (11)$$

em malha fechada:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K\omega_{nMA}^2}{s^2 + 2\xi_{MA}\omega_{nMA}s + K\omega_{nMA}^2} = \frac{\omega_{nMF}^2}{s^2 + 2\xi_{MF}\omega_{nMF}s + \omega_{nMF}^2}, \quad (12)$$

donde

$$\omega_{nMF} = \sqrt{K}\omega_{nMA} \quad (13)$$

$$\xi_{MF} = \frac{\xi_{MA}}{\sqrt{K}} \quad (14)$$



ω_c de malha aberta e ω_{nMF} de malha fechada

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega_c)|_{dB} = 0 &\Leftrightarrow \left| \frac{K\omega_{nMA}}{-\omega_c^2 + j2\xi_{MA}\omega_{nMA}\omega_c} \right| = 1 \\
 &\Leftrightarrow \omega_c^2(\omega_c^2 + 4\xi_{MA}^2\omega_{nMA}^2) = K^2\omega_{nMA}^4 \\
 &\Leftrightarrow \omega_c^4 + 4\xi_{MA}^2\omega_{nMA}^2\omega_c^2 - K^2\omega_{nMA}^4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \omega_c = \omega_{nMA} \sqrt{\sqrt{K^2 + 4\xi_{MA}^4} - 2\xi_{MA}^2} \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$(16)$$

Usando (13) e (14)

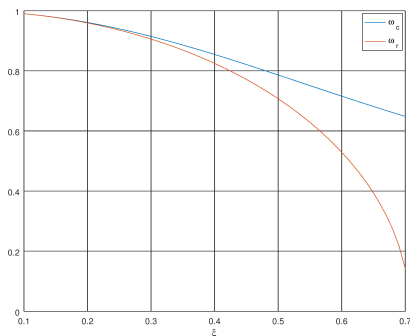
$$\omega_c = \sqrt{K}\omega_{nMF} \sqrt{\sqrt{K^2 + 4K^2\xi_{MF}^4} - 2K\xi_{MF}^2} = \omega_{nMF} \sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_{MF}^4} - 2\xi_{MF}^2} \quad (17)$$

$$\omega_c \approx \omega_{nMF} \sqrt{1 - 2\xi_{MF}^2} = \omega_r, \quad \xi_{MF} \leq 0,4.$$



Observação 3.

A aproximação de $\omega_c \approx \omega_r$ é válida para baixos ξ_{MF} . Se for realizada para valores mais altos de ξ_{MF} , deve-se levar em conta isso fazendo com que a frequência de cruzamento desejada seja maior do que a calculada com a aproximação para obter o valor de $\omega_{n_{MF}}$ que foi determinado a partir dos requisitos.



Margem de fase em malha aberta versus ξ_{MF}

$$\begin{aligned}
 \angle G(j\omega_c) = & \cancel{\angle K} \omega_{nMA} \xrightarrow{0} - \cancel{\angle j\omega_c} \xrightarrow{90^\circ} - \angle(2\xi_{MA}\omega_{nMA} + j\omega_c) \\
 & - 90^\circ + \arctan\left(\frac{\omega_c}{2\xi_{MA}\omega_{nMA}}\right) \\
 & - 90^\circ + \arctan\left(\frac{\cancel{\omega_{nMF}} \sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_{MF}^4} - 2\xi_{MF}^2}}{2\xi_{MF}\cancel{\omega_{nMF}}}\right) \quad (18)
 \end{aligned}$$



Da definição de margem de fase:

$$PM = \angle G(j\omega_c) + 180^\circ = 90^\circ + \arctan \left(\frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_{MF}^4} - 2\xi_{MF}^2}}{2\xi_{MF}} \right) \\ \arctan \left(\frac{2\xi_{MF}}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_{MF}^4} - 2\xi_{MF}^2}} \right) \quad (19)$$

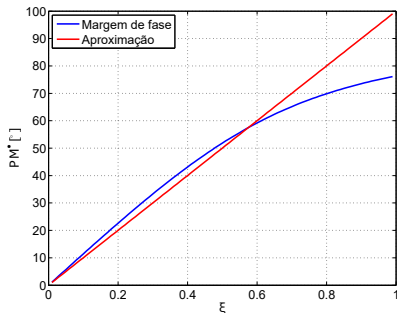


Estabelecemos uma relação entre a **margem de fase em malha aberta** e o **fator de amortecimento em malha fechada**:

$$PM = \arctan \left(\frac{2\xi_{MF}}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi_{MF}^4} - 2\xi_{MF}^2}} \right) \quad (20)$$

Pode ser bem aproximada por uma reta até $\xi_{MF} = 0,65$, quando o erro é de 5° na margem de fase:

$$PM[^\circ] \approx 100\xi_{MF}. \quad (21)$$



Estratégia de projeto

- Equação (20): margem de fase PM em malha aberta com fator de amortecimento ξ_{MF} em malha fechada;
- Equação (17): frequência de cruzamento ω_c em malha aberta com frequência natural $\omega_{n_{MF}}$ em malha fechada;
- Especificações no domínio do tempo em MF ($M_p, t_p, t_r|_0^{100\%}, t_s$)
→ ξ_{MF} e $\omega_{n_{MF}}$ de par de polos desejados MF → PM e ω_c de MA.



Example 2.

Tem-se o seguinte modelo em função de transferência para um sistema:

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)}, \quad (22)$$

e os requisitos sobre a resposta ao degrau são:

- $M_p \leq 0,2$;
- $t_p \leq 4 \text{ s}$.

A resposta do sistema ao degrau diverge (tipo 1), claramente não atendendo aos requisitos. É necessário o controle em malha fechada.



Exemplo 2 - continuação

Os requisitos podem ser traduzidos em ξ_{MF} e ω_{nMF} dos polos desejados em malha fechada:

- $\xi_{MF} \geq 0,45$;
- $\omega_{nMF} \geq 0,88 \text{ rad/s}$.

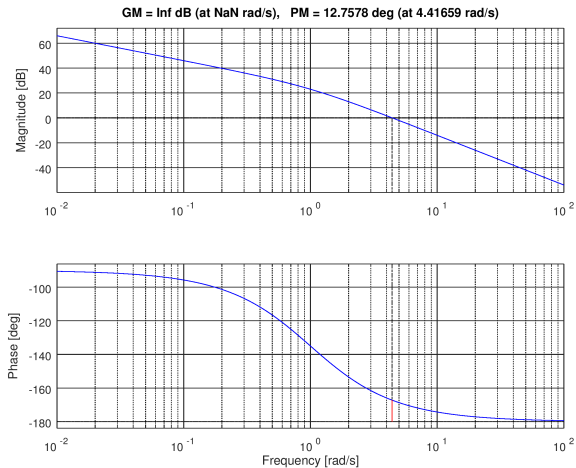
Usando as Equações (20) e (17), podem-se determinar os requisitos sobre a resposta em frequência de $G(s)$ como:

- $PM \geq 48^\circ$;
- $\omega_c \geq 0,72 \text{ rad/s}$.



Exemplo 2 - continuação

- $PM = 12,7^\circ$;
- $\omega_c = 4,4 \text{ rad/s}$.



Exemplo 2 - continuação

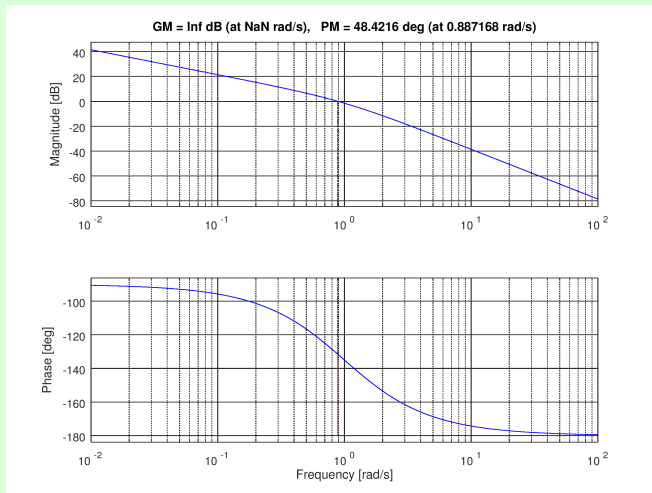
- $\downarrow |G(j\omega)| \Rightarrow \uparrow PM$;
- $\omega_c \geq 0,72 \text{ rad/s}$
- Do diagrama de Bode: $PM = 48^\circ$ em $\omega = 0,88 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_c = 0,88 \text{ rad/s}$;
- Atender simultaneamente aos requisitos de M_p e t_p , sendo que este último é esperado ser menor do que o limiar dado no requisito devido ao fato de que escolheu-se $\omega_c = 0,88 \text{ rad/s} > 0,72 \text{ rad/s}$;

$$K = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \left| \frac{j\omega_c(j\omega_c + 1)}{20} \right| = 0,059. \quad (23)$$



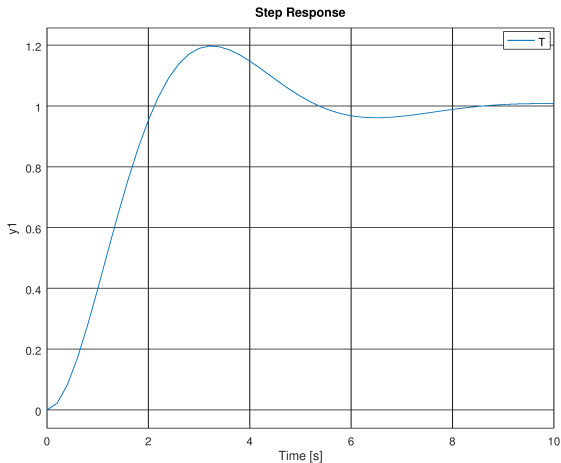
Exemplo 2 - continuação

$$\omega_c = 0,88 \text{ rad/s} \Rightarrow t_p = 3,25 \text{ s};$$



Exemplo 2 - continuação

- $M_p = 0,197$;
- $t_p = 3,25$ s.



Conclusão

- Foi possível atender a ambos os requisitos simultaneamente no Exemplo 2;
- Nem sempre se consegue fazer isso, pois requisitos mais exigentes podem demandar frequências de cruzamento em que a margem de fase é muito pequena para atender ao requisito de sobressinal;
- Nesses casos, é necessário o uso de um controlador em cascata com $G(s)$ que possua dinâmica, de modo a alterar também o gráfico de fase.

