Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 13 - Carta de Nichols-Black

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

2 de abril de 2018

- Diagrama de Bode: $|G(j\omega)| \times \omega$ e $\angle G(j\omega) \times \omega$;
- Conhecer relação entre entre margem de fase e frequência de cruzamento em malha aberta com ξ e ω_n em malha fechada;

Pergunta

Como visualizar o que ocorre com a resposta em malha fechada ao se alterar a resposta em malha aberta colocando um ganho em cascata com $G(s)$?

Carta de Nichols-Black:

- Único gráfico, colocando a fase no eixo das abscissas e a magnitude, no eixo das ordenadas, parametrizando a curva obtida com relação a ω;
- Desenhar a magnitude e a fase da função de transferência de malha fechada:

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1+G(j\omega)|} \Leftrightarrow |T(j\omega)|_{dB} = |G(j\omega)|_{dB} - |1+G(j\omega)|_{dB},$$

$$\angle T(j\omega) = \angle G(j\omega) - \angle\left[1+G(j\omega)\right].$$

Example 1.

Seja a função de transferência de malha aberta:

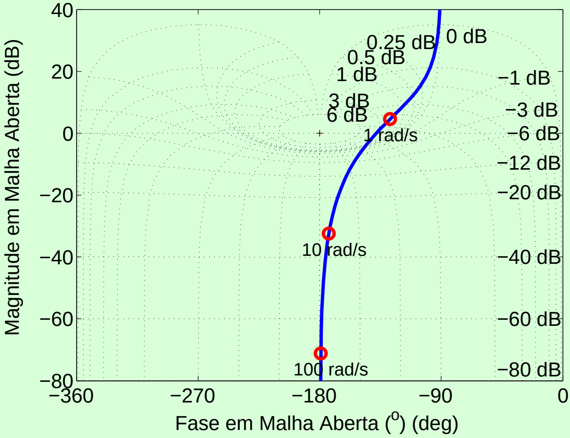
$$G(s) = \frac{2{,}4}{s(s+1{,}2)}, \tag{1}$$

que, com realimentação negativa unitária, corresponde à função de transferência em malha fechada

$$G(s) = \frac{2{,}4}{s^2+1{,}2s+2{,}4}. \tag{2}$$

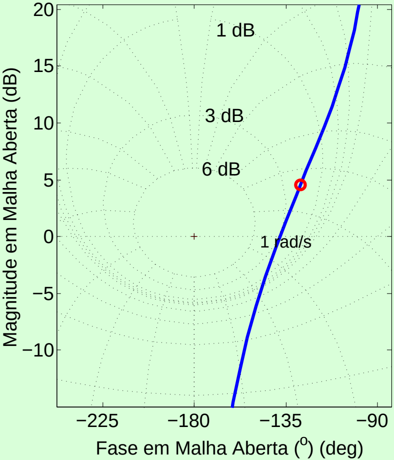
Exemplo 1 - continuação

Desenhando a curva na carta de Nichols-Black:



Exemplo 1 - continuação

- Curva tangencia o lugar geométrico de $3\ dB$ de ganho em malha fechada $\Rightarrow$ maior ganho $\Rightarrow$ pico de ressonância $M_{p\omega} = 3\ dB$.



Exemplo 1 - continuação

Relembrando a fórmula $M_{p\omega}$ em função de ξ:

$$M_{p\omega} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}},\ \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3}$$

e convertendo $3\ dB$ para seu valor em módulo:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$
$$8\xi^2(1-\xi^2) = 1$$
$$8\xi^4 - 8\xi^2 + 1 = 0$$

cujas soluções são $\xi = 0{,}38$ e $\xi = 0{,}92$. A segunda solução é descartada, porque assumimos que $\xi \leq 0{,}707$ para que ocorra ressonância. Com isso, ter-se-ia o sobressinal de:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-0{,}38\pi}{\sqrt{1-0{,}38^2}}} = 0{,}27. \tag{4}$$

Exemplo 1 - continuação

- $\omega_c \approx \omega_r$;
- Aproximar frequência de ressonância em malha fechada pela frequência do cruzamento de $0\ dB$ em malha aberta;
- Neste exemplo, ambas aproximadamente iguais a $1{,}3\ rad/s$;
- Essa frequência é próxima da frequência natural ω_n de $T(j\omega_n)$, então, têm-se:

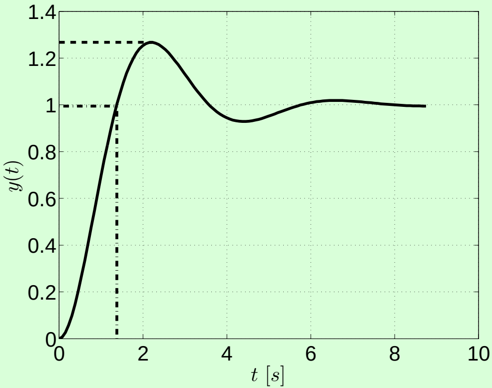
$$\omega_n \approx \omega_r \approx \omega_c = 1{,}3\ rad/s. \tag{5}$$

De posse de estimativas de ξ e ω_n podemos prever como será o comportamento do sistema em malha fechada para uma entrada degrau. Já vimos que o sobressinal será de 27%. Vejamos o tempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n\sqrt{(1-\xi^2}} = \frac{\pi - \arccos(0{,}38)}{1{,}3\sqrt{(1-0{,}38^2}} = 1{,}5\ s. \tag{6}$$

Exemplo 1 - continuação

- Resposta simulada ao degrau unitário
  - M_p: valor predito é exato, 27%;
  - $t_r|_0^{100\%}$: valor observado é de $1{,}4\ s \Rightarrow$ erro de $0{,}1\ s$ (menos de 7%).



Observação 1.

Multiplicar $G(s)$ por uma ganho K em cascata equivale à translação da curva na direção vertical na carta de Nichols-Black. Se quisermos reduzir o sobressinal no Exemplo 1, podemos usar um ganho $|K|_{dB} = -5\ dB$ de modo que a curva passe a tangenciar o lugar geométrico de $1\ dB$ em malha fechada, próximo à frequência $\omega_r = 1\ rad/s$. Com isso, os valore preditos são:

$$10^{2\frac{M_{p\omega}}{20}} 4\xi^4 - 10^{2\frac{M_{p\omega}}{20}} 4\xi^2 + 1 = 0 \Rightarrow \xi \approx 0{,}52, \tag{7}$$

e

$$\omega_n = \frac{\omega_c}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4} - 2\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+40{,}52^4} - 20{,}52^2}} = 1{,}3\ rad/s \tag{8}$$

Observação 1 - continuação

Assim:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-0{,}52\pi}{\sqrt{1-0{,}52^2}}} = 0{,}15 \tag{9}$$

e

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n\sqrt{(1-\xi^2}} = \frac{\pi - \arccos(0{,}52)}{1{,}3\sqrt{(1-0{,}52^2}} = 1{,}9\ s. \tag{10}$$

Observação 1 - continuação

Simulando o sistema em malha fechada com $K = 10^{\frac{-5}{20}} = 0{,}56$, observam-se $M_p = 0{,}15$ e $t_r = 2{,}1\ s$, dentro de faixas razoáveis do comportamento predito dada a imprecisão de nossa leitura do gráfico.