



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 16 - Controladores PD, PI e PID no domínio da frequência

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

12 de abril de 2018

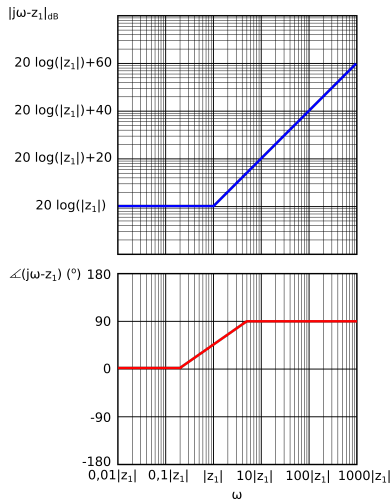
Motivação

- Os controladores mais básicos envolvem uma lei de controle **Proporcional** ao erro $e(t)$ entre a referência $r(t)$ e a saída da planta $y(t)$, isto é o sinal de controle é dado por $u(t) = Ke(t)$, por isso é chamado de controlador **Proporcional** (P);
- Em uma variedade de situações, requer-se um desempenho que não pode ser alcançado com a mera realimentação proporcional;
- Então, pode ser interessante contar com derivadas e/ou integrais do sinal de erro, dando origem aos termos **Derivativo** (D) e **Integrativo** (I) e os controladores que empregam esses termos ficam conhecidos pelas iniciais correspondentes:
 - PD: termos proporcional e derivativo, $u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)$;
 - PI: termos proporcional e integrativo, $u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt$;
 - PID: todos os três termos, $u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \dot{e}(t)$.



Controlador Proporcional-Derivativo – PD

- Requisitos de comportamento amortecido ($PM \uparrow$) com uma velocidade de resposta alta ($\omega_c \uparrow$) \Rightarrow **compensar o sistema**, aumentando a margem de fase na frequência de cruzamento desejada \Rightarrow **compensador de avanço de fase**;
- Recapitulando o efeito da inclusão de um zero no diagrama de Bode: $\Rightarrow PM \uparrow$ em $\omega_c > |z_1|$.



- Uso apenas do zero: $\Rightarrow PM \uparrow$ em $\omega_c > |z_1|$;
- Controlador é mais simples de projetar do que um compensador de avanço de fase, uma vez que só é necessário escolher a posição do zero e o ganho, ficando com a seguinte função de transferência:

$$C(s) = K_p + K_d s = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right). \quad (1)$$

- Origem do nome controlador **Proporcional-Derivativo (PD)**: um termo proporcional ao erro e outro termo que é múltiplo da derivada do erro, com os ganhos K_p e K_d , respectivamente.



Procedimento de projeto

Objetivo: $PM \uparrow$ em $\omega_c > |z_1|$:

- 1 Calcule a posição do zero de forma a fornecer a fase desejada ϕ na frequência ω_c :

$$\phi = \angle C(j\omega_c) = \angle(K_p + K_d j\omega_c) = \arctan\left(\frac{K_d \omega_c}{K_p}\right). \quad (2)$$

De onde se pode calcular

$$\frac{K_d}{K_p} = \frac{\tan(\phi)}{\omega_c}. \quad (3)$$

O zero será:

$$z = -\frac{K_p}{K_d} = -\frac{\omega_c}{\tan(\phi)} \quad (4)$$

e já se terá determinado a relação entre os ganhos proporcional e derivativo.



- 2 Calcule o ganho para que o cruzamento de $0dB$ ocorra em ω_c :

$$|C(j\omega_c)G(j\omega_c)|_{dB} = 0 \Rightarrow |C(j\omega_c)|_{dB} = -|G(j\omega_c)|_{dB}, \quad (5)$$

assim

$$|C(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}. \quad (6)$$



Podem-se desenvolver essas expressões para obter fórmulas para K_p e K_d diretamente a partir da fase e módulo de $G(j\omega_c)$. Calculando:

$$|C(j\omega_c)| = \sqrt{K_p^2 + K_d^2\omega_c^2} \quad (7)$$

e substituindo pelo valor desejado na Equação (6):

$$K_p^2 + K_d^2\omega_c^2 = \frac{1}{|G(j\omega_c)|^2}. \quad (8)$$

Dividindo ambos os lados da Equação (8) por K_d^2

$$\frac{K_p^2}{K_d^2} + \omega_c^2 = \frac{1}{K_d^2|G(j\omega_c)|^2}. \quad (9)$$

Utilizando o valor do zero determinado no primeiro passo do projeto na Equação (4):

$$z^2 + \omega_c^2 = \frac{1}{K_d^2|G(j\omega_c)|^2}. \quad (10)$$



Substituindo z pelo seu valor da Equação (4)

$$\frac{\omega_c^2}{\tan^2(\phi)} + \omega_c^2 = \frac{1}{K_d^2 |G(j\omega_c)|^2} \Rightarrow \omega_c^2 \left(\frac{1}{\tan^2(\phi)} + 1 \right) = \frac{1}{K_d^2 |G(j\omega_c)|^2}. \quad (11)$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\frac{1}{\tan^2(\phi)} + 1 = \frac{1}{\sin^2(\phi)}, \quad (12)$$

temos:

$$\frac{\omega_c^2}{\sin^2(\phi)} = \frac{1}{K_d^2 |G(j\omega_c)|^2}. \quad (13)$$

Isolando K_d :

$$K_d = \frac{\sin(\phi)}{\omega_c |G(j\omega_c)|}. \quad (14)$$

Voltando a usar o valor do zero calculado:

$$K_p = -zK_d = \frac{\omega_c}{\tan(\phi)} \frac{\sin(\phi)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} = \frac{\cos(\phi)}{|G(j\omega_c)|}. \quad (15)$$



Observação 1.

$C(s)$ dado na forma da Equação (1) não é uma função de transferência própria, o que significa o zero puro não pode ser implementado.

- Projeto fica mais simples porque há um parâmetro a menos para se determinar: a localização do polo, em comparação ao projeto do compensador de avanço de fase;
- Considerando novamente o diagrama de Bode, é como se o polo estivesse em uma frequência infinitamente alta, que sequer aparece na escala;
- Por isso, não se enxerga o momento em que o ganho para de crescer, nem o momento em que a fase volta a decrescer até 0.

Proposta de solução

Colocar o polo em uma frequência muito alta, de maneira a não afetar nem a fase nem o ganho em torno de ω_c .



- Função de transferência com polo em $-p$ ($p > 0$): $\frac{1}{s/p+1}$.

$$\left| \frac{1}{j\omega/p + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega/p)^2 + 1}}, \quad (16)$$

$$\angle \frac{1}{j\omega/p + 1} = -\arctan \omega/p. \quad (17)$$

- $\omega = p/100$:

$$\left| \frac{1}{j1/100 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1/100)^2 + 1}} \approx 1,0, \quad (18)$$

$$\angle \frac{1}{j1/100 + 1} = -\arctan 1/100 \approx 0,6^\circ. \quad (19)$$

- $p = 100\omega_c \Rightarrow$ ganho em ω_c é praticamente inalterado e a margem de fase perde menos do que $0,6^\circ$.
- $\omega \ll p$: $\left| \frac{1}{j\omega/p+1} \right| \approx 1$ e $\angle \left(\frac{1}{j\omega/p+1} \right) \approx 0$.



O controlador a ser implementado será:

$$C'(s) = \frac{K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right)}{s/p + 1}. \quad (20)$$

Observação 2.

Pode-se enxergar o controlador PD como o caso particular do avanço de fase em que o polo está em frequência tão mais elevada, que sua contribuição é desprezível.



Example 1.

$$G(s) = \frac{0,005}{s(s + 0,05)}. \quad (21)$$

Requisitos de resposta transitória são:

- $M_p \leq 0,3$;
- $t_r \leq 18 \text{ s}$.

Para o projeto, vamos usar os valores máximos de sobressinal e tempo de subida dos requisitos:

- $M_p = 0,3$;
- $t_r = 18 \text{ s}$.

Então:

- $\xi = 0,35$;
- $\omega_c = 0,11 \text{ rad/s}$.

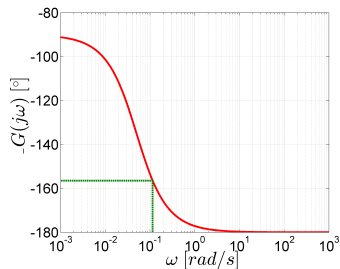
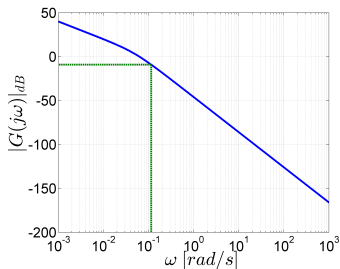


Exemplo 1 - continuação

Para acomodar efeitos de aproximações, somamos 5° na PM :

$$PM_{desejada} = 100\xi + 5^\circ = 40^\circ. \quad (22)$$

- $|G(j\omega_c)|_{dB} = -9,2 \text{ dB}$;
- $\angle G(j\omega_c) = -157^\circ \Rightarrow PM_{atual} = 23^\circ$.



Exemplo 1 - continuação

- $|G(j\omega_c)| = 10^{-\frac{9,2}{20}} = 0,35$;
- $\phi = PM_{desejada} - \angle G(j\omega_c) - 180^\circ = 40^\circ + 157^\circ - 180^\circ = 17^\circ$.

De onde podemos usar a Equação (15) para obter:

$$K_p = \frac{\cos(\phi)}{|G(j\omega_c)|} = \frac{\cos(17^\circ)}{0,35} = 2,7. \quad (23)$$

Adicionalmente, da Equação (14):

$$K_d = \frac{\text{sen}(\phi)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} = \frac{\text{sen}(17^\circ)}{0,11 \times 0,35} = 7,6. \quad (24)$$



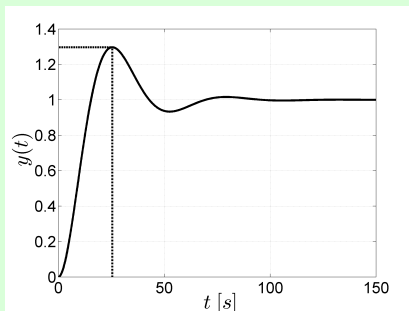
Exemplo 1 - continuação

Impondo

$$p = 100\omega_c = 11, \quad (25)$$

$$C'(s) = \frac{K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right)}{s/p + 1} = \frac{2,7 + 7,6s}{s/11 + 1}. \quad (26)$$

Em simulação: $M_p = 30\%$ e $t_r|_0^{100\%} = 15 \text{ s}$.

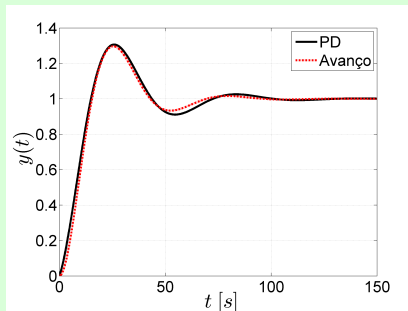


Exemplo 1 - continuação

Já havíamos projetado um compensador de avanço para esse mesmo sistema no Exemplo 1 da Aula 15 sujeito aos mesmos requisitos. O controlador resultante fora:

$$C(s) = 2,1 \frac{12s + 1}{6,5s + 1}. \quad (27)$$

Desempenho é muito parecido na resposta ao degrau:



Pergunta

Há alguma diferença entre o uso dos dois controladores que justifique o trabalho extra de calcular o polo do compensador de avanço de fase?

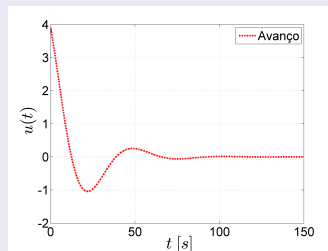
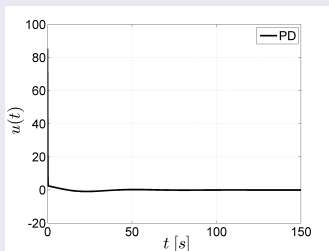


Pergunta

Há alguma diferença entre o uso dos dois controladores que justifique o trabalho extra de calcular o polo do compensador de avanço de fase?

Resposta

Valor do sinal de controle com o PD é muito maior do que com o compensador de avanço de fase.



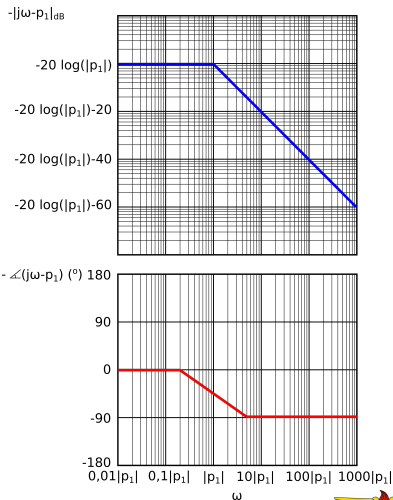
Conclusão

- Desempenho similar na resposta ao degrau, mas seus valores de controle muito diferentes;
- Motivo da diferença: PD tem um termo que é a derivada do sinal de entrada;
- Para uma entrada degrau, idealmente, a derivada seria o impulso (com amplitude infinita e duração infinitesimal);
- Mesmo com o polo em $100\omega_c$ suavizando essa derivada: valor ainda é ≈ 20 vezes maior do que o obtido com o avanço;
- Em aplicação prática, sinais com amplitude muito elevada e duração curta dificilmente podem ser aplicados;
- Muitas vezes, o trabalho um pouco maior para se projetar um compensador de avanço é realmente necessário.



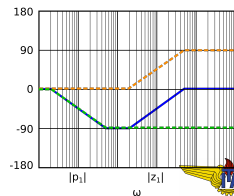
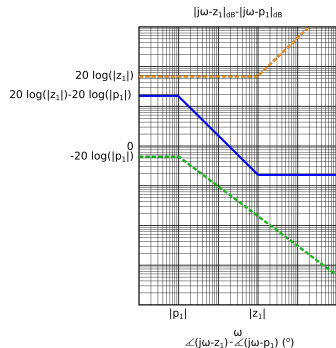
Controlador Proporcional-Integrativo – PI

- Reduzir o erro em regime estacionário \Rightarrow necessário aumentar o ganho em baixas frequências;
- Introduzir um polo com frequência de quebra baixa;
- Como o polo reduz a fase do sistema \rightarrow cancelar esse efeito colocando um zero com frequência superior à do polo, mas ainda bem abaixo de ω_c .
- Com isso, consegue-se um aumento do ganho em baixas frequências de $\frac{z}{p}$.

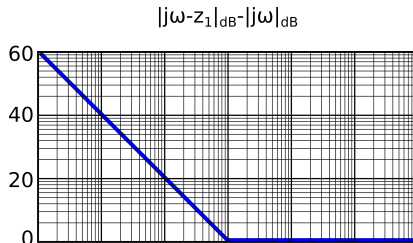


Controlador Proporcional-Integrativo – PI

- Reduzir o erro em regime estacionário \Rightarrow necessário aumentar o ganho em baixas frequências;
- Introduzir um polo com frequência de quebra baixa;
- Como o polo reduz a fase do sistema \rightarrow cancelar esse efeito colocando um zero com frequência superior à do polo, mas ainda bem abaixo de ω_c .
- Com isso, consegue-se um aumento do ganho em baixas frequências de $\frac{z}{p}$.



- $C(0)G(0) \uparrow \Rightarrow$ constantes de erro $\uparrow \Rightarrow$ erro em regime estacionário \downarrow ;
- Porém, e se necessitássemos zerar o erro em regime estacionário? Isso iria requerer aumentar $C(0)G(0) \rightarrow \infty$;
- Como o ganho depende de $\frac{z}{p}$, fazer $p \rightarrow 0 \Rightarrow C(0)G(0) \rightarrow \infty$;
- Diagrama de Bode do ganho do controlador ficaria com inclinação de -20 dB/década para qualquer frequência menor do que p ;
- Pode-se observar que o ganho cresce indefinidamente quanto menor é a frequência. Contudo, após a frequência de quebra do zero, o ganho retorna para 0.



- O controlador tem a seguinte função de transferência:

$$C(s) = \frac{s+z}{s}. \quad (28)$$

- Grau de liberdade para ajustar o ganho de malha fechada \Rightarrow multiplicar $C(s)$ por K_p :

$$C'(s) = K_p \frac{s+z}{s} = K_p + \frac{K_p z}{s} = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad (29)$$

que é a forma usual de um controlador **PI**:

- Ganho K_p é responsável pelo nome **proporcional**;
- Ganho K_i com s no denominador equivale a um ganho sobre a **integral**.
- Selecionar $z = \frac{K_i}{K_p} \ll \omega_c$ para que não afete a margem de fase do sistema.



Controlador Proporcional-Integrativo-Derivativo – PID

- Paralelos:
 - compensador de avanço de fase e o PD;
 - compensador de atraso de fase e o PI;
- Muitas vezes é necessário ajustar o comportamento da resposta transitória e do erro em regime estacionário.
- Conjugando os efeitos dos controladores PI e PD em um único controlador, o **Proporcional-Integrativo-Derivativo (PID)**;
- Existem muitas maneiras de parametrizar o PID, sendo uma delas o produto dos termos PD e PI, com os ganhos proporcionais condensados em K_p e em que já está considerado o polo para tornar a função de transferência própria:

$$C(s) = K_p \frac{1 + K_d/K_p s}{s/p + 1} \frac{s + z}{s}. \quad (30)$$



$$C(s) = K_p \frac{1 + K_d/K_p s}{s/p + 1} \frac{s + z}{s}.$$

- Resposta em frequência do controlador será obtido apenas “somando” as respostas em frequência de cada termo:
 - parte PD será responsável por fornecer a PM necessária na frequência ω_c ;
 - ganho K_p será ajustado de maneira a fazer com que o cruzamento de fato ocorra em ω_c ;
 - escolhe-se o zero do PI de $z \ll \omega_c$, visando evitar perder margem de fase.
- Similar ao procedimento adotado no projeto de compensador de avanço e atraso de fase.



Example 2.

$$G(s) = \frac{0,01}{(s + 0,05)(s + 0,7)}. \quad (31)$$

Os requisitos serão

- $M_p \leq 0,1$;
- $t_r \leq 15 \text{ s}$;
- $e_{ss} = 0$, para entrada degrau unitário.

Para o projeto, vamos usar os valores máximos de M_p e $t_r|_0^{100\%}$:

- $M_p = 0,1$;
- $t_r = 15 \text{ s}$.

Resultando:

- $\xi = 0,59$;
- $\omega_c = 0,18 \text{ rad/s}$.

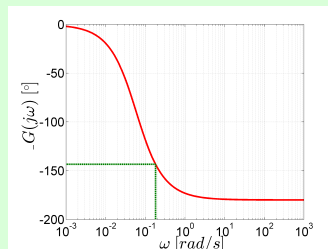
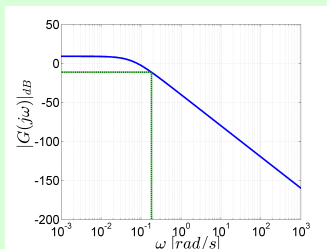


Exemplo 2 - continuação

Para acomodar efeitos de aproximações e perda de fase devida ao PI, somamos 5° na PM:

$$PM_{desejada} = 100\xi + 5^\circ = 59^\circ + 5^\circ = 64^\circ. \quad (32)$$

$$|G(j\omega_c)|_{dB} = -11,2 \text{ dB e } \angle G(j\omega_c) = -144^\circ \Rightarrow PM_{atual} = 36^\circ.$$



Exemplo 2 - continuação

$$|G(j\omega_c)| = 10^{-\frac{11,2}{20}} = 0,275, \quad (33)$$

$$\phi = PM_{desejada} - \angle G(j\omega_c) - 180^\circ = 64^\circ + 144^\circ - 180^\circ = 28^\circ. \quad (34)$$

Com estes valores, podemos usar a Equação (15) para calcular:

$$K_p = \frac{\cos(\phi)}{|G(j\omega_c)|} = \frac{\cos(28^\circ)}{0,275} = 3,2. \quad (35)$$

Adicionalmente, da Equação (14):

$$K_d = \frac{\text{sen}(\phi)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} = \frac{\text{sen}(28^\circ)}{0,18 \times 0,275} = 9,5. \quad (36)$$



Exemplo 2 - continuação

Impondo:

$$p = 100\omega_c = 18. \quad (37)$$

Em seguida, basta incluir o termo integrador para obter o erro em regime estacionário nulo. Escolhendo o zero do PI com frequência de quebra 10 vezes menor do que ω_c , tem-se:

$$z = \frac{\omega_c}{10} = 0,018. \quad (38)$$

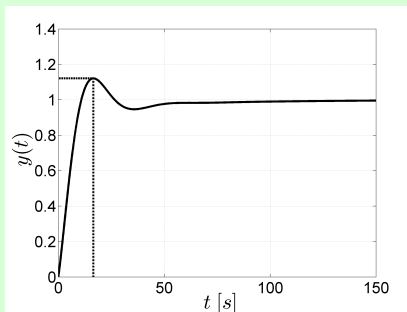
O controlador finalmente fica com função de transferência:

$$C(s) = \frac{K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right)}{s/p + 1} \frac{s + z}{s} = 3,2 \frac{1 + 9,5/3,2s}{s/18 + 1} \frac{s + 0,018}{s}. \quad (39)$$

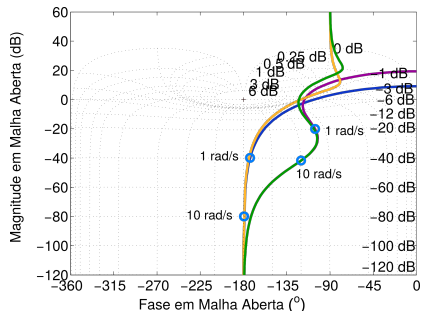


Exemplo 2 - continuação

- Resposta em MF para entrada degrau unitário: $M_p = 10\%$ e $t_r|_{100\%} = 12\text{ s}$;
- Termo integral faz com que o erro em regime estacionário seja nulo.



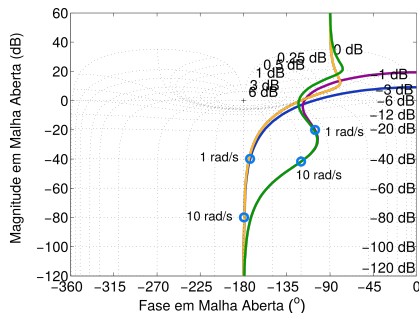
- Resposta em frequência da função não-compensada: em azul com realimentação unitária:
- $\omega_c \ll 1 \text{ rad/s}$ e $PM \approx 80^\circ$: isso indica comportamento muito lento;
- Ganho em frequências baixas é de cerca de 10 dB, o que indica que o sistema deve apresentar erro em regime estacionário para entrada degrau apreciável.



- PD em série com o sistema com a seguinte função de transferência:

$$C_{PD}(s) = 3,2 \frac{1 + 9,5/3,2s}{s/18 + 1}. \quad (40)$$

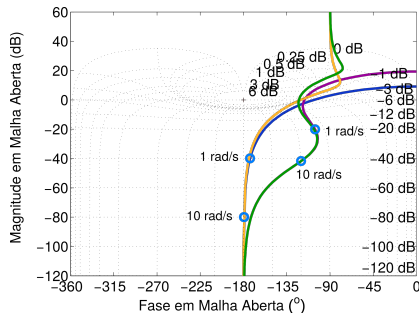
- Curva em **magenta**:
- $\downarrow PM = 63^\circ$, e há pico de ressonância em torno de $0,5 \text{ dB}$.
- ω_c mais próxima de $1 \text{ rad/s} \Rightarrow$ diminuição do tempo de resposta.



- PI em série com o sistema com a seguinte função de transferência:

$$C_{PI}(s) = \frac{s + 0,018}{s}, \quad (41)$$

- Curva em **amarelo**:
- ↓ *PM*.
- ↑ ganho em baixas frequências.



- PID em série com o sistema com a seguinte função de transferência:

$$C_{PID}(s) = \frac{3,2 + 9,5s}{s/18 + 1} \frac{0,018}{s}, \quad (42)$$

- Curva em verde:
- diminui levemente a PM , quando comparada com a curva amarela.
- aumenta infinitamente o ganho DC.

