



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 17 - Lidando com o atraso no domínio da frequência

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

10 de abril de 2018

Atraso de transporte de δ unidades de tempo corresponde à multiplicação da função de transferência pelo fator $e^{-\delta s}$:

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s}, \quad (1)$$

em que $G_n(s)$ é a função de transferência sem considerar o atraso (função racional em s).

Substituindo $s = j\omega$:

$$|G(j\omega)|_{dB} = |G_n(j\omega)|_{dB} + |e^{-j\delta\omega}|_{dB} = |G_n(j\omega)|_{dB}, \quad (2)$$

pois, pela identidade de Euler:

$$e^{-j\delta\omega} = \cos(\delta\omega) - j\text{sen}(\delta\omega), \quad (3)$$

donde

$$|e^{-j\delta\omega}| = \sqrt{\cos^2(\delta\omega) + \text{sen}^2(\delta\omega)} = 1. \quad (4)$$



$$\angle G(j\omega) = \angle G_n(j\omega) + \angle e^{-j\delta\omega} = \angle G_n(j\omega) + \delta\omega. \quad (5)$$

Isso porque, novamente recorrendo à identidade de Euler:

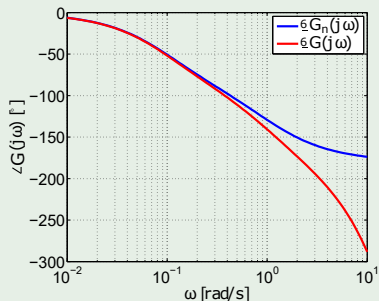
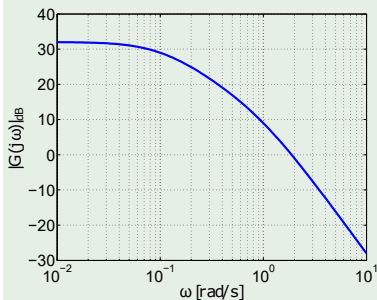
$$\begin{aligned} \angle e^{-j\delta\omega} &= \arctan \frac{\operatorname{Im} \{ e^{-j\delta\omega} \}}{\operatorname{Re} \{ e^{-j\delta\omega} \}} = \arctan \frac{-\operatorname{sen}(\delta\omega)}{\cos(\delta\omega)} \\ &= \arctan(-\tan \delta\omega) = -\delta\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

- Diagrama de módulo de $G(j\omega)$ será exatamente o mesmo de $G_n(j\omega)$, tendo em vista a Eq. (2);
- Diagrama de fase igual ao $G_n(j\omega)$ menos $\delta\omega$ (vide Eq. (5)).



Example 1.

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s+0,1)(s+1)}e^{-0,2s}. \quad (7)$$



- $\omega_c = 1,9 \text{ rad/s}$
- $PM = 31^\circ$.



Exemplo 1 - continuação

Estimar fator de amortecimento:

$$\xi \approx \frac{PM}{100} = 0,31. \quad (8)$$

e sobressinal

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,36. \quad (9)$$

Tempo de subida

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi^2}} = 1 \text{ s}. \quad (10)$$



Exemplo 1 - continuação

- Diagramas com o atraso: ganho não vai mudar
 $\Rightarrow \omega_c = 1,9 \text{ rad/s}$;
- $PM \approx 10^\circ$:

$$\xi \approx \frac{PM}{100} = 0,10. \quad (11)$$

e o sobressinal aumenta para

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,73. \quad (12)$$

O tempo de subida passa a ser

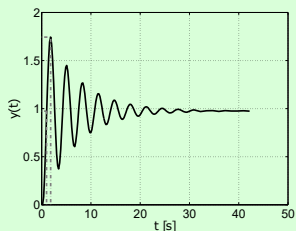
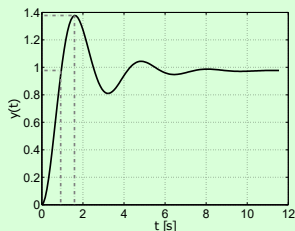
$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \approx \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi^2}} = 0,88 \text{ s}. \quad (13)$$



Exemplo 1 - continuação

Respostas ao degrau unitário:

- sem atraso $M_p = 0,41$ e $t_r = 0,92$ s;
- com atraso $M_p = 0,79$ e $t_r = 1$ s;
- comportamento da saída mais oscilatório devido à $PM \downarrow$ ocasionada pelo atraso;
- poderia levar à instabilidade do sistema em MF.



A fim de compensar a perda de fase causada pelo atraso, pode-se ajustar o ganho de forma a diminuir ω_c e, assim, aumentar a PM .

