



## Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

# Aula 18 - Regiões de desempenho no Plano s

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

3 de maio de 2018

# Resposta a degrau de sistemas de 2ª ordem subamortecidos

- Par de polos complexos conjugados com parte real negativa, parametrizados como  $-\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ ;
- Função de transferência:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (1)$$

- Entrada degrau unitário  $\Rightarrow R(s) = \frac{1}{s}$ :

$$Y(s) = \frac{A}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (2)$$

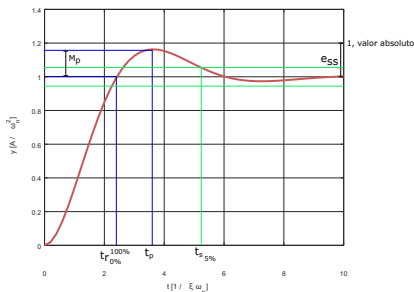
- Transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) \right]$$



$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) \right]$$

- $t_r|_{0}^{100\%} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$ : tempo de subida de 0% a 100% do valor final;
- $t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}$ : instante de pico;
- $t_{s5\%} \approx \frac{\ln 0,05}{-\xi\omega_n} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ : tempo de acomodação a uma faixa de 5% do valor final;
- $M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ : máxima ultrapassagem com relação ao valor em regime estacionário.



# Regiões de desempenho no plano $s$

- **Hipótese de trabalho:** sistema em MF se comporta como 2<sup>a</sup> ordem com par de polos complexos conjugados:
  - Mapear requisitos de comportamento em regime transitório a posições de polos desejados da função de transferência em malha fechada;
  - Definir regiões no plano  $s$  que atendam os requisitos.

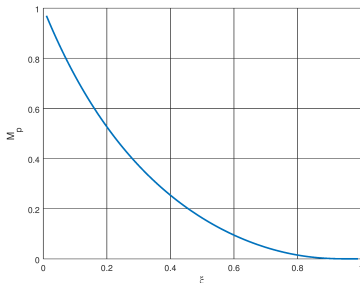


# Sobressinal

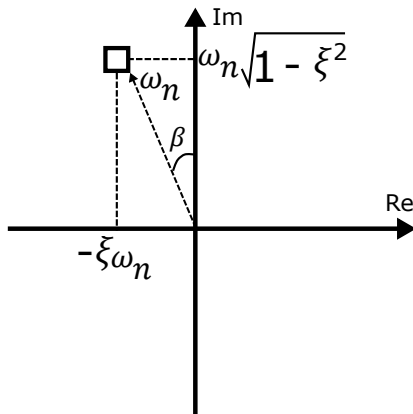
- Requisito de sobressinal  $\Rightarrow$  valor máximo para  $M_p$ ;
- Sistema de segunda ordem subamortecido:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}}, \quad (4)$$

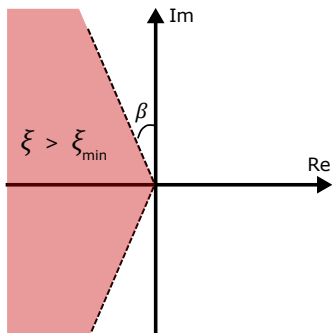
- $M_p(\xi)$  estritamente decrescente  $\Rightarrow$  sobressinal máximo  $\sim \xi$  mínimo.



- Polos  $-\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$ ;
- $\xi = \arcsen(\beta)$ , em que  $\beta$  é o ângulo entre o eixo imaginário e a posição do polo  $\square$  no plano s.



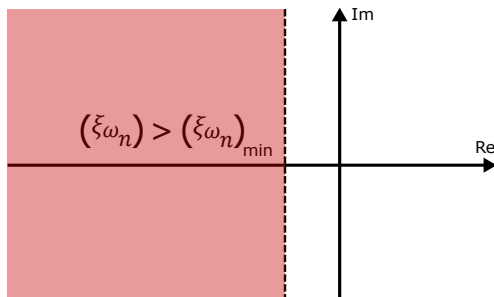
- Região que atende  $M_p \leq M_p^{max} \sim \xi \geq \xi_{min}$ .



# Tempo de acomodação

$$t_{s,5\%} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}. \quad (5)$$

- Parte real dos polos:  $-\xi\omega_n$ ;
- Requisito:  $t_{s,5\%} \leq t_{s,5\%}^{max} \Rightarrow (\xi\omega_n) \geq (\xi\omega_n)_{min}$ .

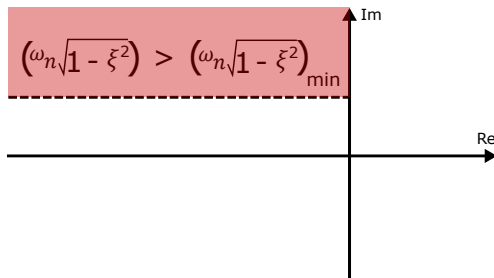




# Tempo de pico

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (6)$$

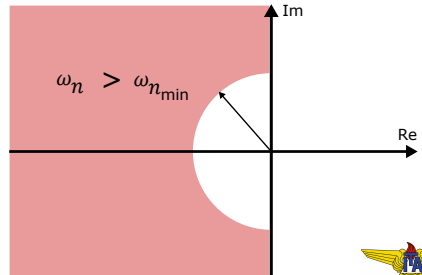
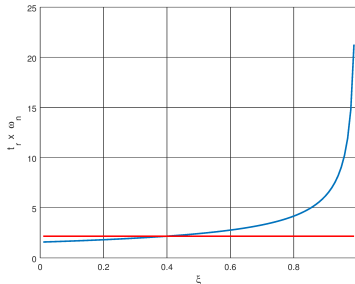
Parte imaginária de  $\square$ :  $\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ . Requisito:  $t_p \leq t_p^{max} \Rightarrow$   
 $(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}) \geq (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})_{min}$ .



# Tempo de subida

$$t_r|_0^{100\%} = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (7)$$

- $t_r|_0^{100\%} \times \omega_n$  aproximado por uma constante até  $\xi = 0,5$ ;
- Constante 2,2 exata para  $\xi = 0,4 \Rightarrow t_r|_0^{100\%} \approx 2,2/\omega_n$ ;
- Requisito:  $(t_r|_0^{100\%}) \leq (t_r|_0^{100\%})_{max} \Rightarrow \omega_n \geq \omega_{n_{min}}$ .



### Observação 1.

*As regiões apresentadas são válidas para a localização dos **polos de malha fechada no plano s de sistemas de segunda ordem subamortecidos sem zeros.***

### Observação 2.

*Caso tenham-se diversos requisitos, a região que atenderá a todos eles **simultaneamente** será dada pela **interseção** de duas ou mais, a depender de quais requisitos são considerados.*

