Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 19 - Aproximação de 2^a ordem

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

4 de maio de 2018

Efeitos de se adicionarem zeros e polos ao sistema de segunda ordem subamortecido

Regiões no plano s para os polos de MF de sistemas de 2^a ordem subamortecidos $\rightarrow$ atender requisitos de transitório

Pergunta

Quão distante do comportamento destes sistemas se encontram outras variedades de sistemas, com polos e zeros adicionais?

Função de transferência base em MF:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{1}$$

Cuja resposta temporal já sabemos relacionar com os valores de ξ e ω_n.

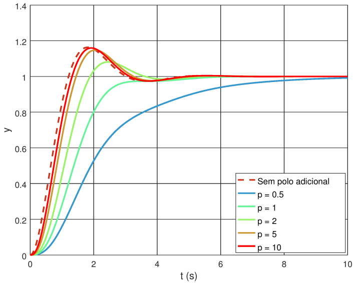
Observação 1.

A multiplicação de $T(s)$ *na Equação* (1) *por um ganho altera meramente o valor em regime estacionário da saída, mas não muda as características de regime transitório que estão sendo consideradas nesta seção, por isso optamos por* $T(s)$ *com ganho estático (DC) unitário, sem perda de generalidade.*

Adição de um polo

$$T_p(s) = \frac{T(s)}{s/p+1} = \frac{\omega_n^2}{(s/p+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}. \qquad (2)$$

- $\xi = 0{,}5$ e $\omega_n = 2\ rad/s \Rightarrow \xi\omega_n = 1$:



- Polo adicional se afasta do imaginário mais do que $\xi\omega_n \Rightarrow$ resposta se aproxima da do sistema de segunda ordem.

Observação 2.

- *Sistema com polo adicional: sistema de primeira ordem em cascata com o sistema de segunda ordem.*
- *Em vez de o sinal de entrada do sistema de segunda ordem ser o sinal degrau, será uma versão filtrada do mesmo, dada por:*

$$R'(s) = \frac{1}{s/p+1}R(s). \tag{3}$$

- *Tendo em vista que para entrada degrau $R(s) = \frac{1}{s}$, pode-se tomar a transformada inversa de Laplace e obter o sinal no domínio do tempo:*

$$r'(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s/p+1)}\right\} = 1 - e^{-pt},\ t \geq 0. \tag{4}$$

Observação 2 - continuação

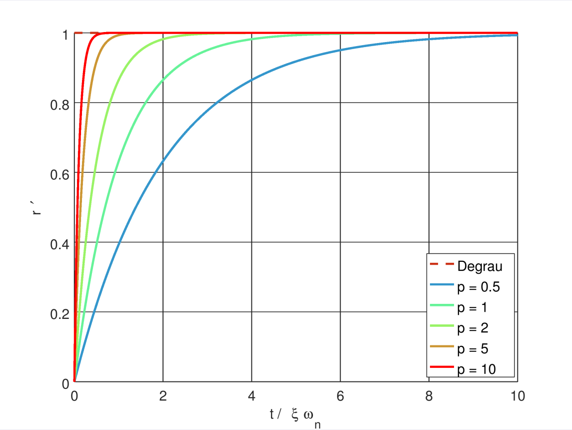
$$r'(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s/p+1)}\right\} = 1 - e^{-pt},\ t \geq 0.$$

- Constante de tempo do sistema de segunda ordem $\xi\omega_n$;
- Quanto maior $\frac{p}{\xi\omega_n}$, mais rapidamente o valor de $r'(t)$ parecerá convergir para o valor em regime estacionário, se assemelhando cada vez mais a um degrau;
- Quanto menor o valor de $\frac{p}{\xi\omega_n}$, mais lentamente a referência $r'(t)$ tenderá para o valor do degrau, tornado a resposta do sistema completo mais lenta, distanciando-se da resposta do sistema de segunda ordem ao degrau.

Observação 2 - continuação

$$r'(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s/p+1)}\right\} = 1 - e^{-pt},\ t \geq 0.$$

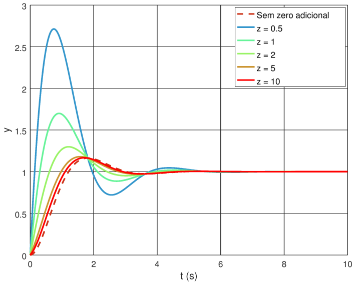
$p = 0{,}5\xi\omega_n$, $p = \xi\omega_n$, $p = 2\xi\omega_n$, $p = 5\xi\omega_n$ e $p = 10\xi\omega_n$, com $\xi\omega_n = 1$



Adição de um zero

$$T_z(s) = (s/z+1)T(s) = \frac{(s/z+1)\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}. \tag{5}$$

- $\xi = 0{,}5$ e $\omega_n = 2\ rad/s \Rightarrow \xi\omega_n = 1$:



- Zero adicional mais afastado do eixo imaginário do que $\xi\omega_n \Rightarrow$ resposta se aproxima mais da do sistema de segunda ordem.

Observação 3.

- *Separar efeitos de cada termo no numerador de* $T_z(s)$

$$T_z(s) = \underbrace{\frac{(s/z)\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}_{(s/z)T(s)} + \underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}_{T(s)}. \tag{6}$$

$$Y_z(s) = (s/z)Y(s) + Y(s), \tag{7}$$

$Y(s)$*: transformada de Laplace da resposta sem o zero.*

- *Transformada inversa de Laplace*

$$y_z(t) = \frac{\dot{y}(t)}{z} + y(t), \tag{8}$$

- *Saída com o zero: soma da saída do sistema sem o zero com a sua derivada escalonada por* $\frac{1}{z}$.

Observação 3 - continuação

Para entrada degrau

$$
\begin{aligned}
y_{z_d}(t) =& \frac{\dot{y_d}(t)}{z} + y_d(t) = -\frac{\xi\omega_n}{z} e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right] + \\
&+ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{z}\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left[-\operatorname{sen}(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cos(\omega_d t)\right] + \\
&+ e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right] \\
=& e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi + \omega_n/z}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right] \\
=& y_d(t) + \underbrace{e^{-\xi\omega_n t}\frac{\omega_n}{z\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)}_{y'_{z_d}(t)}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Observação 3 - continuação

- Adiciona-se o termo $y'_{z_d}(t)$ à resposta ao degrau, tal que $y'_{z_d}(t) > 0,\ 0 < t < \pi/\omega_d$;
- Multiplicação deste termo por $1/z$ explica porque quanto maior o valor de z, menor o efeito percebido na resposta ao degrau;

1. A presença do zero resulta em resposta mais rápida e menos amortecida;
2. Esse efeito é tão mais relevante quanto mais próximo o zero do eixo imaginário no plano s.

Adição de um polo e um zero

Polo zero distintos:

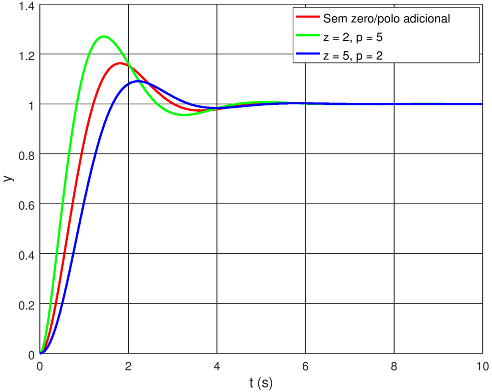
$$T_{pz}(s) = \frac{s/z+1}{s/p+1} T(s) = \frac{(s/z+1)\omega_n^2}{(s/p+1)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}. \qquad (10)$$

- Polo adicional torna a resposta mais amortecida e lenta;
- Zero adicional torna a resposta menos amortecida e mais rápida.

Pergunta

No caso de se adicionar um par de zero e polo, pode-se perguntar: qual efeito predominará?

- Distância do polo e do zero ao eixo imaginário determina quanto se influencia a resposta:
  - quanto mais distante do eixo imaginário, menor a influência.
- Então, a resposta é: **a influência predominante será a do termo mais próximo do eixo imaginário**.



- Limites para aproximar resposta ao degrau de um sistema qualquer pela de um sistema de segunda ordem com um par de polos complexos conjugados;
- Tanto melhor quanto mais distantes as raízes adicionais estiverem do eixo imaginário;
- Par de polos complexos conjugados mais próximo do eixo imaginário $\rightarrow$ parte mais relevante da resposta: **polos dominantes**;
- Hipótese válida quando os demais polos estão “suficientemente mais afastados” do eixo imaginário do que os polos dominantes;
- “Suficientemente mais afastados”: **parte real pelo menos 5 vezes maior (em valor absoluto) do que a parte real dos polos dominantes**;
- Considerando polos dominantes: manipular um ganho K em cascata com a função de transferência de malha aberta $G(s) \Rightarrow$ função de transferência $T(s)$ em MF apresente os polos dominantes desejados.