



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 2 - Modelos matemáticos de sistemas

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

22 de fevereiro de 2018

Modelos de sistemas dinâmicos a tempo contínuo

Usaremos a Equação Diferencial Ordinária (EDO) a coeficientes constantes relacionando a saída $y(t)$ à entrada $u(t)$, que pode ser escrita como:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}, \quad n \geq m \quad (1)$$

Observação 1.

Muitas vezes vamos reescalonar a equação (1), dividindo ambos os lados por α_n , para que o coeficiente do termo de mais alta ordem seja unitário.



Sistemas próprios e estritamente próprios

- Requisito $n \geq m \rightarrow$ causalidade do sistema: a saída y em um dado instante t_0 não pode depender da entrada $u(t)$ para $t > t_0$.
- Quando $n \geq m$ o sistema é dito **próprio**;
- Caso $n > m$, o sistema é chamado **estritamente próprio**, pois $y(t_0)$ depende exclusivamente de $u(t), t < t_0$.



Linearidade

Sejam as saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ relacionadas às entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_1(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_2(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u_2(t)}{dt^k}, \quad (3)$$

então a saída $y(t)$ para uma entrada $u(t) = \gamma_1 u_1(t) + \gamma_2 u_2(t)$ obedece:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} &= \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k [\gamma_1 u_1(t) + \gamma_2 u_2(t)]}{dt^k} = \quad (4) \\ &= \sum_{k=0}^m \beta_k \gamma_1 \frac{d^k u_1(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^m \beta_k \gamma_2 \frac{d^k u_2(t)}{dt^k} = \underbrace{\gamma_1 \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u_1(t)}{dt^k}}_{\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_1(t)}{dt^i}} + \underbrace{\gamma_2 \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u_2(t)}{dt^k}}_{\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_2(t)}{dt^i}}. \end{aligned}$$

Então, a solução $y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ é, de fato, solução da EDO.



Invariância no Tempo

Seja a saída $y(t)$ resultado da aplicação da entrada $u(t)$ ao sistema da equação (1), então, se aplicarmos a entrada $u(t - t_0)$ (entrada u atrasada de t_0 unidades de tempo), a saída obedecerá:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_d(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u(t - t_0)}{dt^k} \quad (5)$$

Realizando a mudança de variável $\tau = t - t_0$, tem-se que $\frac{d^k u(t - t_0)}{dt^k} = \frac{d^k u(\tau)}{d\tau^k}$, donde:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y_d(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^m \beta_k \frac{d^k u(\tau)}{d\tau^k} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y(\tau)}{d\tau^i} \quad (6)$$

Desta forma $y_d(t) = y(\tau) = y(t - t_0)$, i. e., a saída y_d para entrada atrasada de t_0 unidades de tempo é a saída y atrasada de t_0 unidades de tempo que o sistema apresenta à entrada $u(t)$ sem atraso.



Obtenção de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos

Os modelos matemáticos podem ser obtidos, grosso modo, de três maneiras diferentes:

- 1 mediante a aplicação de leis físicas, tais como as leis de Newton para o movimento, leis de Kirchhoff para circuitos elétricos, leis da termodinâmica, etc.;
- 2 mediante ensaios práticos com o sistema, levantando suas características, como resposta a entradas conhecidas (degrau unitário, rampa, parábola) e resposta em frequência;
- 3 um misto dos dois primeiros.

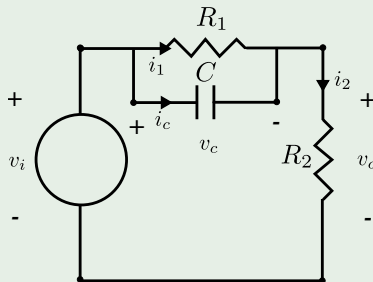


Obtenção de modelos matemáticos por meio de leis físicas

Leis físicas relacionam as grandezas em sistemas por meio de equações e permitem obter as relações entre as variáveis.

Example 1.

Seja o circuito mostrado a seguir, em que a entrada é a tensão v_i da fonte e a saída é a tensão v_o entre os terminais do resistor R_2 , vamos obter o modelo na forma de equação diferencial.



Exemplo 1 - continuação

Das Leis de Kirchhoff, têm-se:

$$v_o + v_c - v_i = 0 \quad (7)$$

$$i_1 + i_c - i_2 = 0 \quad (8)$$

Adicionalmente, das equações dos elementos:

$$v_o = R_2 i_2 \quad (9)$$

$$v_c = R_1 i_1 \quad (10)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (11)$$

Substituindo as correntes de (9), (10) e (11) em (8):

$$\frac{v_c}{R_1} + C \frac{dv_c}{dt} - \frac{v_o}{R_2} = 0 \quad (12)$$



Exemplo 1 - continuação

Agora, usando (7) para eliminar v_c de (12):

$$\frac{v_i}{R_1} - \frac{v_o}{R_1} + C \frac{dv_i}{dt} - C \frac{dv_o}{dt} - \frac{v_o}{R_2} = 0 \quad (13)$$

Identificando a saída $y = v_o$ e a entrada $u = v_i$ e dividindo todos os termos por C , obtém-se:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} y = \frac{du}{dt} + \frac{1}{R_1 C} u \quad (14)$$

Neste exemplo têm-se $n = m = 1$, i. e., o sistema é próprio e $\alpha_1 = 1$, $\alpha_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$, $\beta_1 = 1$ e $\beta_0 = \frac{1}{R_1 C}$.



Observação 2.

Além das leis de Kirchhoff, foram fundamentais para a obtenção do modelo no exemplo 1 as equações relacionadas às variáveis (tensões e correntes) nos elementos do circuito (resistores R_1 e R_2 e capacitor C).

Observação 3.

O modelo obtido é LIT (EDO a coeficientes constantes).



Modelos de sistemas mecânicos obtidos por meio da equação de Lagrange

Os dois exemplos a seguir mostram a aplicação de leis físicas (equação de Lagrange) para obter modelos de sistemas mecânicos. A equação de Lagrange é:

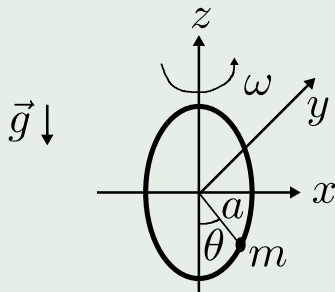
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial q}, \quad (15)$$

em que T é a energia cinética, V é a energia potencial, q é a coordenada generalizada e $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.



Example 2.

Massa pontual em um arco girante vertical. Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um arco de raio a que gira em torno de um eixo vertical com velocidade constante ω . Determine a dinâmica do ângulo θ que o raio unindo a massa ao centro do arco forma com o eixo vertical, como na figura a seguir.



Exemplo 2 - continuação

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\omega t) \quad (16)$$

$$y = a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (17)$$

$$z = -a \cos(\theta) \quad (18)$$

em que $q = \theta$ é a coordenada generalizada.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = a [\dot{\theta} \cos(\theta) \cos(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\omega t)] \quad (19)$$

$$\dot{y} = a [\dot{\theta} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\theta) \cos(\omega t)] \quad (20)$$

$$\dot{z} = a \dot{\theta} \operatorname{sen}(\theta) \quad (21)$$



Exemplo 2 - continuação

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{ma^2}{2} [\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2(\theta)] \quad (22)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ma^2 \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{m}{2} a^2 \omega^2 \sin(2\theta) \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \dot{\theta} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \ddot{\theta} \quad (25)$$



Exemplo 2 - continuação

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgh = mga [1 - \cos(\theta)] \quad (26)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mga \operatorname{sen}(\theta) \quad (27)$$



Exemplo 2 - continuação

Usando a Equação de Lagrange (15):

$$ma^2\ddot{\theta} - \frac{m}{2}a^2\omega^2 \text{sen}(2\theta) = -mga \text{sen}(\theta) \quad (28)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} \text{sen}(2\theta) - \frac{g}{a} \text{sen}(\theta) \quad (29)$$



Exemplo 2 - continuação

Usando a Equação de Lagrange (15):

$$ma^2\ddot{\theta} - \frac{m}{2}a^2\omega^2 \sin(2\theta) = -mga \sin(\theta) \quad (28)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} \sin(2\theta) - \frac{g}{a} \sin(\theta) \quad (29)$$

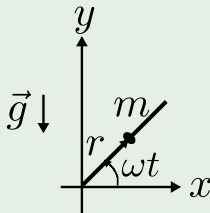
Observação 4.

*O modelo resultante na equação (29) **não é linear**. Nestes casos, veremos que ainda assim será possível aplicar, respeitadas certas limitações, as técnicas para modelos lineares por meio de uma aproximação linear do modelo.*



Example 3.

Massa pontual em um fio girante. Suponha que uma massa pontual m seja livre para deslizar sobre um fio que gira em torno de um eixo horizontal com velocidade constante ω , como na figura a seguir. Determine a dinâmica da distância r entre a massa e o centro rotação.



Exemplo 3 - continuação

Nesse caso, têm-se as seguintes equações para as posições:

$$x = r \cos(\omega t) \quad (30)$$

$$y = r \sin(\omega t) \quad (31)$$

em que $q = r$ é a coordenada generalizada.

Derivando com respeito ao tempo:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\omega t) - r\omega \sin(\omega t) \quad (32)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \quad (33)$$



Exemplo 3 - continuação

A energia cinética é:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\omega^2) \quad (34)$$

Donde:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\omega^2 \quad (35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} \quad (37)$$



Exemplo 3 - continuação

A energia potencial, por sua vez, é:

$$V = mgy = mgr \operatorname{sen}(\omega t) \quad (38)$$

donde:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = mg \operatorname{sen}(\omega t) \quad (39)$$



Exemplo 3 - continuação

Usando a Equação de Lagrange (15):

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = -mg \operatorname{sen}(\omega t) \quad (40)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - g \operatorname{sen}(\omega t) \quad (41)$$



Exemplo 3 - continuação

Usando a Equação de Lagrange (15):

$$m\ddot{r} - mr\omega^2 = -mg \operatorname{sen}(\omega t) \quad (40)$$

Reordenando os termos:

$$\ddot{r} = r\omega^2 - g \operatorname{sen}(\omega t) \quad (41)$$

Observação 5.

*O modelo obtido na equação (41) é **variante no tempo**.*



Lidando com modelos não lineares: linearização por série de Taylor

- O modelo do Exemplo 2 – Eq.(29) – **não é linear**;
- Para $\theta = \bar{\theta} + \delta\theta$ com pequenas variações $\delta\theta$ em torno de $\bar{\theta} = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta\theta} &= \frac{\omega^2}{2} \text{sen}[2(\bar{\theta} + \delta\theta)] - \frac{g}{a} \text{sen}(\bar{\theta} + \delta\theta) = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \{ \text{sen}[2\bar{\theta}] \cos[2\delta\theta] + \cos[2\bar{\theta}] \text{sen}[2\delta\theta] \} + \\ &\quad - \frac{g}{a} \{ \text{sen}[\bar{\theta}] \cos[\delta\theta] + \cos[\bar{\theta}] \text{sen}[\delta\theta] \} \\ &\underbrace{=}_{\bar{\theta}=0} \frac{\omega^2}{2} \text{sen}[2\delta\theta] - \frac{g}{a} \text{sen}[\delta\theta] \underbrace{\approx}_{\delta\theta \rightarrow 0} \left(\omega^2 - \frac{g}{a} \right) \delta\theta; \quad (42) \end{aligned}$$

- Este modelo aproximado é linear;
- Caso o sistema permaneça operando em uma região em que as aproximações usadas para o seno sejam válidas, podemos usar o modelo linearizado.



Formalização

- Linearizar o modelo expandindo os termos não lineares em uma **série de Taylor** em torno do valor de operação e admitindo pequenas variações do sinal em uma vizinhança deste ponto.

Admitindo que a relação entrada-saída (modelo) seja dada por:

$$f \left(\underbrace{\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t)}_Y, \underbrace{\frac{d^m u(t)}{dt^m}, \dots, \frac{du(t)}{dt}, u(t)}_U \right) = 0, \quad (43)$$

em que f é uma função não linear, mas suave. Podemos reescrever f em termos de $y = \bar{y} + \delta y$ e $u = \bar{u} + \delta u$, ou, de forma vetorial, $Y = \bar{Y} + \delta Y$ e $U = \bar{U} + \delta U$, em que \bar{Y} e \bar{U} são soluções de (43), i. e., $f(\bar{Y}, \bar{U}) = 0$.



Com isso, podemos expandir essa função em série de Taylor:

$$f(Y, U) = f(\bar{Y}, \bar{U}) + \frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial Y} \cdot \delta Y + \frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial U} \cdot \delta U + \underbrace{R(Y, U)}_{\text{termos de mais alta ordem}} \quad (44)$$

Considerando variações pequenas para δY e δU , os termos de mais alta ordem terão magnitude muito menor do que os termos de ordem 1. Assim, é razoável admitir que:

$$f(Y, U) \approx f(\bar{Y}, \bar{U}) + \frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial Y} \cdot \delta Y + \frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial U} \cdot \delta U \quad (45)$$

Donde

$$\frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial Y} \cdot \delta Y + \frac{\partial f(\bar{Y}, \bar{U})}{\partial U} \cdot \delta U \approx \delta f(Y, U) = 0 \quad (46)$$

Então, o **modelo linearizado** da equação (46) é uma boa aproximação para pequenas variações δY e δU em torno de \bar{Y} e \bar{U} , respectivamente.



Exemplo de aplicação

Retomando o modelo da eq. (29) do Exemplo 2, tem-se que:

$$f \left(\underbrace{\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta}_{\Theta} \right) = \ddot{\theta} - \frac{\omega^2}{2} \text{sen}[2\theta] + \frac{g}{a} \text{sen}[\theta] = 0. \quad (47)$$

Donde:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}}(\Theta) = 1 \quad (48)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}(\Theta) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\Theta) = -\omega^2 \cos[2\theta] + \frac{g}{a} \cos[\theta]$$

Tomando $\bar{\Theta} = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}}(\bar{\Theta}) = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}(\bar{\Theta}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}(\bar{\Theta}) = -\omega^2 + \frac{g}{a} \quad (49)$$



Então, usando (46), tem-se:

$$\frac{\partial f(\bar{\Theta})}{\partial \Theta} \cdot \delta \Theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\omega^2 + \frac{g}{a} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \ddot{\theta} \\ \delta \dot{\theta} \\ \delta \theta \end{bmatrix} = \delta \ddot{\theta} + \left(-\omega^2 + \frac{g}{a}\right) \delta \theta = 0, \quad (50)$$

que é o mesmo resultado obtido em (42).

