



# Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

## Aula 20 - Lugar Geométrico das Raízes

Rubens J M Afonso

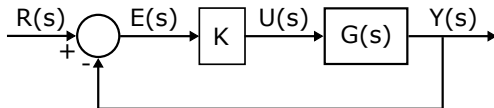
EES-10: Sistemas de Controle I

14 de maio de 2018

# Lugar Geométrico das Raízes

Considerando realimentação unitária e controle proporcional e a função de transferência em malha fechada é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}. \quad (1)$$



O conhecimento dos polos de MF é importante para determinar o comportamento da resposta. Conhecer as raízes do numerador de  $T(s)$ , i. e., as soluções de:

$$1 + KG(\square) = 0. \quad (2)$$



- Isolando  $G(\square)$  na Equação (2):

$$G(\square) = -\frac{1}{K}, \quad (3)$$

em que assumimos  $K \in \mathbb{R}^+$ . Com isso, tem-se que  $G(\square) \in \mathbb{R}^-$ .

- Possíveis soluções  $\square$  da Equação (2) são tais que:

$$\angle G(\square) = -180^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

- Lugar geométrico no plano  $s$  dos pontos que verificam a igualdade da Equação (4): **Lugar Geométrico das Raízes (LGR)** (ou *Root Locus* em inglês) de  $G$ .
- Desenvolvimento: W. R. Evans em 1948.



- Polos de  $T(s)$  (malha fechada) estarão restritos ao LGR de  $G(s)$ ;
- Posição específica a depender do valor de  $K$ ;
- Visualizar onde os polos podem ser alocados;
- Sobrepor LGR ao traçado das regiões de desempenho: saber se o sistema em malha fechada pode apresentar o comportamento imposto pelos requisitos;
- Caso seja possível, basta encontrar valores de  $\square$  que atendem aos requisitos e então resolver a Equação (3) para  $K$ , resultando:

$$K = -\frac{1}{G(\square)}. \quad (5)$$



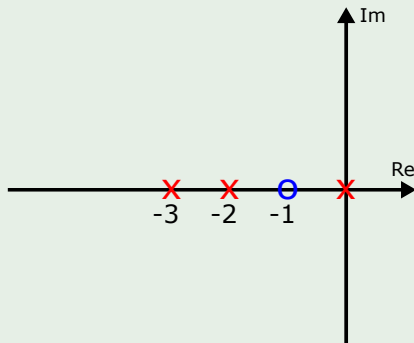
- Encontrar todas as soluções da Equação (4) analiticamente pode ser impraticável;
- Alternativas:
  - 1 determinar as soluções numericamente;
  - 2 **regras para esboçar o LGR sem realizar muitos cálculos.**



## Example 1.

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}. \quad (6)$$

- 1 Marcar os polos e zeros de  $G(s)$  no plano  $s$ . Usualmente, os polos são marcados com símbolos  $\times$  e os zero com  $\circ$ :



A fase de uma  $G(s)$  genérica dada por

$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m s + z_k}{\prod_{i=1}^n s + p_i} \quad (7)$$

é

$$\angle G(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s + z_k) - \sum_{i=1}^n \angle(s + p_i). \quad (8)$$



## Trechos do LGR no eixo real

- $s_r \in \mathbb{R} \rightarrow$  determinar que trechos do eixo real fazem parte do LGR:
  - 1  $s_r \in \mathbb{R}$  está à direita de uma raiz real, então esta contribui com  $0^\circ$  de fase;
  - 2  $s_r \in \mathbb{R}$  está à esquerda de uma raiz real, então esta contribui com  $+180^\circ$  de fase se for um zero ou  $-180^\circ$  se for um polo.
- Supondo:
  - $M$  zeros reais tais que  $-z_k > s_r$ ,
  - $N$  polos reais tais que  $-p_i > s_r$ ,

$$\angle G(s_r) = M \cdot 180^\circ - N \cdot 180^\circ = (M - N) \cdot 180^\circ \quad (9)$$

- Fase obedecerá a condição na Equação (4)  $\Leftrightarrow$   
 $M - N = 2q + 1, q \in \mathbb{Z};$
- $M, N \in \mathbb{Z}^+ M - N = 2q + 1, q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow M + N = 2q' + 1, q' \in \mathbb{Z};$
- **pontos do eixo real tais que há um número ímpar de raízes à direita fazem parte do LGR.**





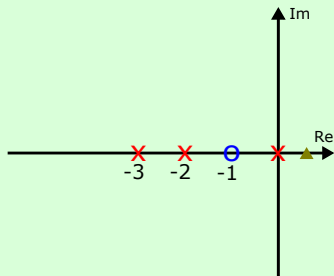
### Observação 1.

*Para os casos de polos e zero complexos conjugados, devido à simetria com respeito ao eixo real, estes de fato não influenciam neste critério, pois suas contribuições de fase se anulam na Equação (8).*



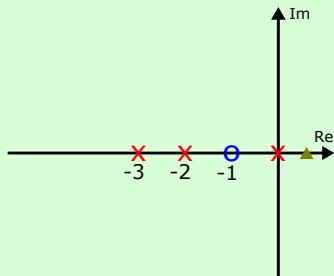
## Exemplo 1 - continuação

- Representando  $s_r$  pelo triângulo;



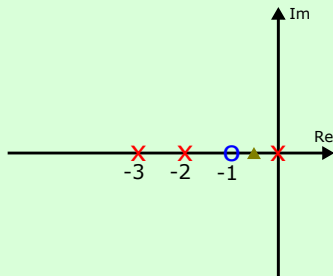
## Exemplo 1 - continuação

- Representando  $s_r$  pelo triângulo;
- $s_r$  está à direita de 0 raízes reais, então não faz parte do LGR;



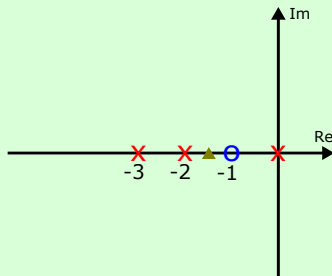
## Exemplo 1 - continuação

- Representando  $s_r$  pelo triângulo;
- $s_r$  está à direita de 0 raízes reais, então não faz parte do LGR;
- $s_r$  está à direita de 1 raiz real, então faz parte do LGR;



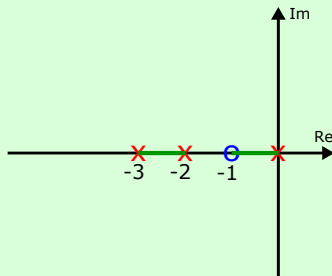
## Exemplo 1 - continuação

- Representando  $s_r$  pelo triângulo;
- $s_r$  está à direita de 0 raízes reais, então não faz parte do LGR;
- $s_r$  está à direita de 1 raiz real, então faz parte do LGR;
- $s_r$  está à direita de 2 raízes reais, então faz parte do LGR;



## Exemplo 1 - continuação

- Representando  $s_r$  pelo triângulo;
- $s_r$  está à direita de 0 raízes reais, então não faz parte do LGR;
- $s_r$  está à direita de 1 raiz real, então faz parte do LGR;
- $s_r$  está à direita de 2 raízes reais, então faz parte do LGR;
- Repetindo esse procedimento até percorrer todas as raízes reais da direita para a esquerda, podem-se determinar todos os trechos que pertencem ao LGR no eixo real.



# Ramos, orientação do LGR e assíntotas

$$K = -\frac{1}{G(\square)}.$$

- $K = 0 \Rightarrow$  polos de  $G(s)$  satisfazem à equação, i.e. , estão no LGR e correspondem a  $K = 0$ ;
- $K = \infty \Rightarrow$  zeros de  $G(s)$  satisfazem à equação, i.e. , estão no LGR e correspondem a  $K = \infty$ .
- Conclusão: LGR deve começar nos polos de MA e ir em direção aos zeros de MA à medida que o ganho  $K$  varia entre 0 e  $\infty$ ;
- Número de ramos distintos no LGR corresponde ao número  $n$  de polos de  $G(s)$ ;
- Número  $m$  de zeros de  $G(s)$ :
  - 1  $m = n \Rightarrow$  cada ramo começa em um polo e termina em um zero;
  - 2  $m < n \Rightarrow$  ramos que não tiverem zeros para terminar seguem segundo assíntotas para zeros no infinito.



# Assíntotas

Parametrizando  $s = re^{j\theta}$ , com  $r \rightarrow \infty$ , podem-se determinar os ângulos e os cruzamentos com o eixo real das assíntotas;

$$\angle G(re^{j\theta}) = \sum_{k=1}^m \angle(re^{j\theta} + z_k) - \sum_{i=1}^n \angle(re^{j\theta} + p_i). \quad (10)$$

Como  $r \gg z_k, p_i$ , pode-se determinar a fase como:

$$\angle G(re^{j\theta}) = (m - n)\theta. \quad (11)$$

Para que esteja no LGR, o ângulo  $\theta_i$  da  $i$ -ésima assíntota pode ser determinado como:

$$\theta_i = \frac{\angle G(re^{j\theta})}{m - n} = \frac{-180^\circ + (i - 1)360^\circ}{m - n}, \quad 1 \leq i \leq n - m. \quad (12)$$





Quanto ao cruzamento das assíntotas com o eixo real, precisamos aproximar  $G(s)$  por:

$$G(s) \approx \frac{1}{(s + \alpha)^{n-m}}, \quad (13)$$

em que  $n > m$  para que haja assíntotas (caso contrário, há igual número de zeros e polos e todos os ramos vão para os zeros finitos). Expandindo o produto no denominador de (13):

$$G(s) \approx \frac{1}{s^{n-m} + (n-m)\alpha s^{n-m-1} + \dots}. \quad (14)$$

Por outro lado,

$$G(s) = \frac{1}{\frac{\prod_{i=1}^n s + p_i}{\prod_{k=1}^m s + z_k}} \quad (15)$$

Expandindo a fração no denominador de (15):

$$\frac{\prod_{i=1}^n s + p_i}{\prod_{k=1}^m s + z_k} = \frac{s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \dots}{s^m + \sum_{k=1}^m z_k s^{m-1} + \dots}. \quad (16)$$



Fazendo a divisão dos polinômios da fração no denominador de (16):

$$\begin{array}{r}
 s^n + (\sum_{i=1}^n p_i) s^{n-1} + \dots \\
 -s^n - (\sum_{k=1}^n z_k) s^{n-1} - \dots \\
 \hline
 (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^n z_k) s^{n-1} + \dots \\
 - (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^n z_k) s^{n-1} + \dots \\
 \hline
 \text{resto grau } n-2
 \end{array}
 \quad \left| \frac{s^m + (\sum_{k=1}^m z_k) s^{m-1} + \dots}{s^{n-m} + (\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^n z_k) s^{n-m-1} + \dots} \right.$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n s + p_i}{\prod_{k=1}^m s + z_k} = s^{n-m} + \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m z_k \right) s^{n-m-1} + \dots \quad (17)$$

Identificando os coeficientes dos termos de grau  $n - m - 1$  em (14) e (17):

$$(n - m)\alpha = \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m z_k \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m z_k}{n - m}. \quad (18)$$

$\alpha$ : **centroide das assíntotas.**



## Observação 2.

*Observando (15) e (13), nota-se que as raízes dos polinômios são  $-z_k$ ,  $-p_i$  e  $-\alpha$ , respectivamente. Com isso, vale ressaltar que a fórmula da Equação (18) pode ser aplicada diretamente usando os valores dos zeros, polos e encontrando o centroide das assíntotas, pois os sinais teriam que ser trocados dos dois lados, anulando-se. De fato, essa é a forma como muitos livros apresentam esta fórmula.*



## Exemplo 1 - continuação

Retomando a função de transferência (6)

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}.$$

têm-se:

- $z_1 = -1$
- $p_1 = 0$
- $p_2 = -2$
- $p_3 = -3$

Usando estes valores em (18) ( $n = 3$  e  $m = 1$ ):

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m z_k}{n - m} = \frac{0 + (-2) + (-3) - (-1)}{3 - 1} = -2. \quad (19)$$

O centroide coincidiu com  $p_2$ , mas basta examinar (18) para concluir que isto foi fortuito e não se constitui em uma regra.

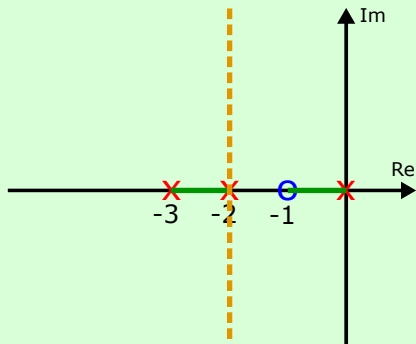


## Exemplo 1 - continuação

Calculando a fase das assíntotas por meio de (12):

$$\theta_1 = \frac{-180^\circ}{-2} = 90^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{-180^\circ - 360^\circ}{-2} = 270^\circ \quad (20)$$



## Pontos de saída/chegada ao eixo real

- Sabe-se do Exemplo 1 que os dois polos de malha fechada no trecho entre os polos de malha aberta  $p_2 = -2$  e  $p_3 = -3$  devem se descolar do eixo real à partir de um certo valor de  $K > 0$  para seguir em direção às assíntotas;
- Para calcular esse ponto de saída do eixo real:
  - observar que, no ponto de saída, os dois polos estão no mesmo valor  $\square_{quebra} \Rightarrow \square_{quebra}$  deve ser raiz múltipla de  $1 + KG(s) = 0 \Rightarrow \square_{quebra}$  deve ser raiz múltipla de  $1/K + G(s) = 0 \Rightarrow \square_{quebra}$  deve ser raiz de

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{K} + G(s) \right) = \frac{dG(s)}{ds} = 0. \quad (21)$$

- Os valores de  $\square_{quebra}$  que resolvem (21) são candidatos a pontos de saída (também podem ser pontos de entrada, pontos de cruzamento do LGR ou não pertencer ao mesmo).



## Exemplo 1 - continuação

Retomando mais uma vez a função de transferência (6)

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}.$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{G(s)} &= \frac{d}{ds} \frac{s(s+2)(s+3)}{s+1} \\ &= \frac{d}{ds} \frac{s^3 + 5s^2 + 6s}{s+1} \\ &= \frac{(3s^2 + 10s + 6)(s+1) - (s^3 + 5s^2 + 6s)}{(s+1)^2} \\ &= \frac{2s^3 + 8s^2 + 10s + 6}{(s+1)^2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$



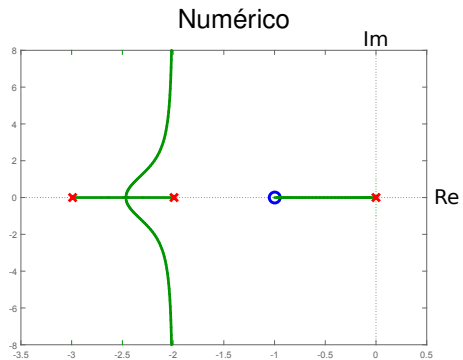
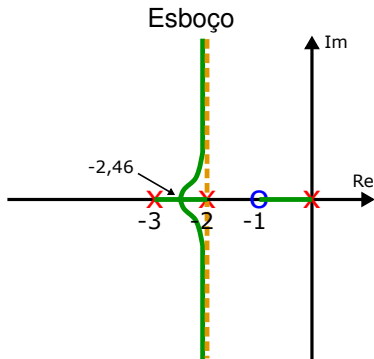
### Exemplo 1 - continuação

$$2s^3 + 8s^2 + 10s + 6 = 0. \quad (23)$$

As raízes são  $s = -2,46$  e  $s = -0,77 \pm j0,79$ , em que as duas últimas não interessam, porque não pertencem ao eixo real. Então  $\square_s = -2,46$  é o ponto de saída e pode-se completar o esboço.



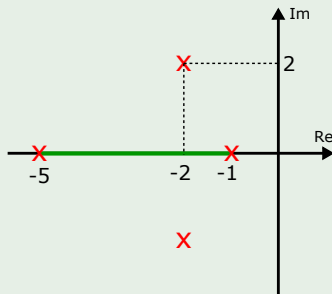




## Example 2.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)(s^2+4s+8)} \quad (24)$$

- Polos  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -5$ ,  $p_3 = -2 + j2$  e  $p_4 = -2 - j2$ .
- Trechos no eixo real como aqueles com um número ímpar de raízes à direita:



## Exemplo 2 - continuação

- $n = 4$  polos e  $m = 0$  zeros  $\Rightarrow$  4 trechos do LGR tendem a assíntotas:

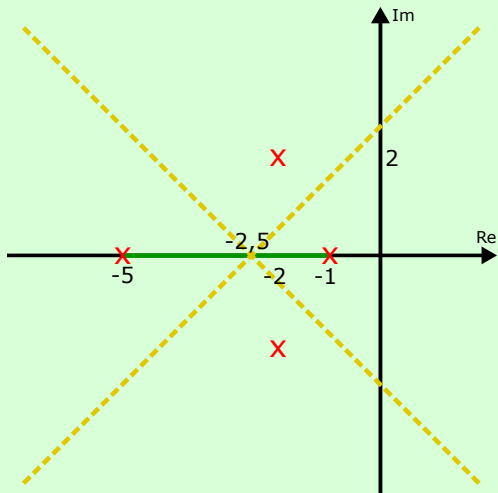
$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{k=1}^m z_k}{n - m} = \frac{(-1) + (-5) + (-2 + j2) + (-2 - j2)}{4 - 0} = -2,5. \quad (25)$$

e

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{-180^\circ}{-4} = 45^\circ \\ \theta_2 &= \frac{-180^\circ - 360^\circ}{-4} = 135^\circ \\ \theta_3 &= \frac{-180^\circ - 720^\circ}{-4} = 225^\circ \\ \theta_4 &= \frac{-180^\circ - 1080^\circ}{-4} = 315^\circ. \end{aligned} \quad (26)$$



## Exemplo 2 - continuação



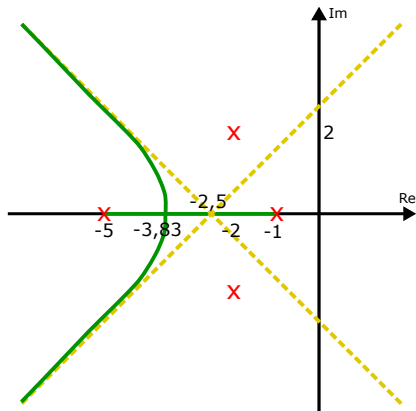
## Exemplo 2 - continuação

- Ponto de quebra:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \frac{1}{G(s)} &= \frac{d}{ds} (s+1)(s+5)(s^2+4s+8) \\ &= \frac{d}{ds} (s^2+6s+5)(s^2+4s+8) \\ &= \frac{d}{ds} (s^4+10s^3+37s^2+68s+40) \\ 4s^3+30s^2+74s+68 &= 0, \quad (27)\end{aligned}$$

cujas raízes são  $s = -3,83$  e  $s = -1,84 \pm j1,03 \Rightarrow \square_{quebra} = -3,83$ .





### Pergunta

Como exatamente os ramos saem dos polos complexos conjugados e onde cruzam o eixo imaginário em direção ao SPD?



# Ângulos de partida dos polos e chegada aos zeros

- Determinar ângulos de partida dos polos e chegada aos zeros:
  - colocar um ponto que pertença ao LGR a uma distância infinitesimal da raiz de interesse;
  - como este ponto pertence ao LGR:

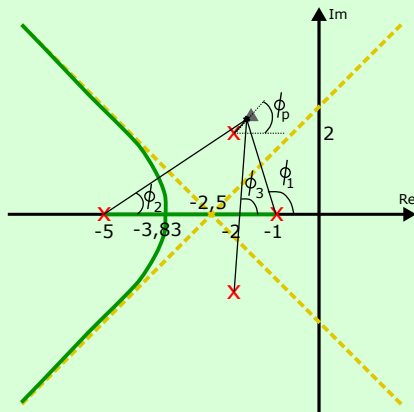
$$\angle G(\Delta) = -\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_p = -180^\circ. \quad (28)$$



## Exemplo 2 - continuação

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)(s^2+4s+8)}$$

- $p_3 = -2 + j2$ :  $\Delta$  a distância infinitesimal.



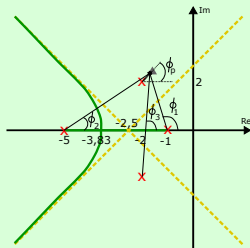


## Exemplo 2 - continuação

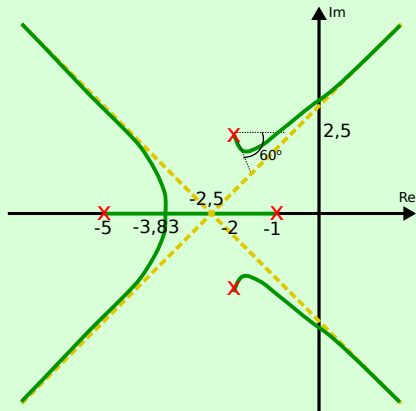
$$\begin{aligned}\phi_1 &= \angle(p_3 - p_1) = \angle(-1 + j2) = 116,6^\circ \\ \phi_2 &= \angle(p_3 - p_2) = \angle(3 + j2) = 33,7^\circ \\ \phi_3 &= \angle(p_3 - p_4) = \angle(j4) = 90^\circ\end{aligned}\quad (29)$$

Substituindo estes valores em (28):

$$\phi_p = 180^\circ - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = -60,3^\circ. \quad (30)$$



## Exemplo 2 - continuação



Caso houvesse zeros, a expressão envolveria fases com sinal positivo também, e pode ser generalizada como:

$$\phi_p = 180^\circ + \sum_k \angle(p - z_k) - \sum_i \angle(p - p_i), \quad (31)$$

para o ângulo de partida de um polo simples  $p$ , e

$$\phi_c = -180^\circ - \sum_k \angle(z - z_k) + \sum_i \angle(z - p_i), \quad (32)$$

para o ângulo de chegada de um zero simples  $z$ .



### Observação 3.

Para raízes com multiplicidade  $r > 1$ , basta considerar os ângulos de todas as raízes (**excluídas as  $r$  raízes de interesse**) e depois determinar

$$\phi_{p,l} = \frac{180^\circ + (l-1) \cdot 360^\circ + \sum_k \angle(p - z_k) - \sum_i \angle(p - p_i)}{r}, \quad (33)$$

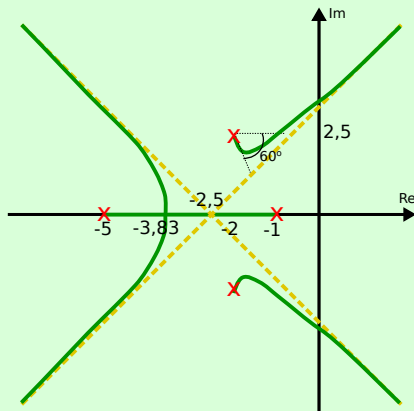
para o ângulo de partida de um polo  $p$  com multiplicidade  $r$ , e

$$\phi_{c,l} = \frac{-180^\circ - (l-1) \cdot 360^\circ - \sum_k \angle(z - z_k) + \sum_i \angle(z - p_i)}{r}, \quad (34)$$

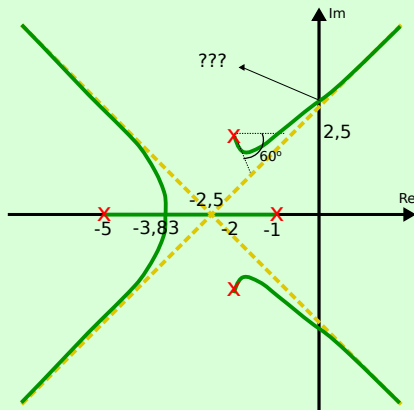
para o ângulo de chegada de um zero  $z$  com multiplicidade  $r$ , em que  $1 \leq l \leq r$ .



## Exemplo 2 - continuação



## Exemplo 2 - continuação



## Pergunta

Onde (e para qual valor de  $K$ ) ocorre o cruzamento do eixo imaginário?



# Cruzamento do eixo imaginário

- Critério de Routh-Hurwitz: determinar valores de ganho  $K$  limítrofes.

## Exemplo 2 - continuação

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)(s^2+4s+8)}$$

- Polinômio do denominador da função de transferência em malha fechada é:

$$d(s) = s^4 + 10s^3 + 37s^2 + 68s + (40 + K). \quad (35)$$



## Exemplo 2 - continuação

$$d(s) = s^4 + 10s^3 + 37s^2 + 68s + (40 + K).$$

- Tabela de Routh:

$s^4$	1	37	$40 + K$
$s^3$	10	68	
$s^2$	$302/10$	$40 + K$	
$s^1$	$68 - 100(40 + K)/302$		
$s^0$	$40 + K$		

- Valores limítrofes para trocas de sinal:
  - $K = -4$  (linha  $s^0$ );
  - $K = 165,36$  (linha  $s^1$ );





## Exemplo 2 - continuação

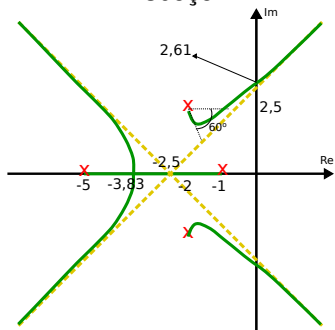
- Assumimos  $K > 0$ , valor limítrofe de interesse  $K_{lim} = 165,36$ :

$$d(s) = s^4 + 10s^3 + 37s^2 + 68s + 205,36, \quad (36)$$

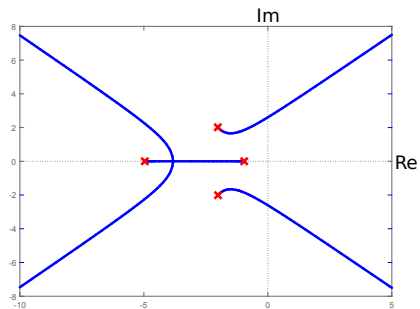
- Raízes  $-5 \pm j2,28$  e  $\pm j2,61 \Rightarrow$  cruzamento do eixo imaginário em  $\pm j2,61$ .



Esboço



Numérico



## LGR de outros parâmetros

## Example 3.

$$G_p(s) = \frac{s + z}{s^2 + 2s + 10}, \quad (37)$$

Posição do zero  $z$  pode variar no intervalo  $[0, \infty)$ ;

- Caso geral: encontrar raízes de  $1 + KG(s) = 0$  com  $K \in [0, \infty)$   
 $\Rightarrow$  condição de fase para:

$$G(\square) = -\frac{1}{K},$$

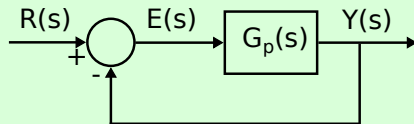
é

$$\angle G(\square) = \sum_{k=1}^m \angle(\square + z_k) - \sum_{i=1}^n \angle(\square + p_i) = -180^\circ + l \cdot 360^\circ, l \in \mathbb{Z}.$$



### Exemplo 3 - continuação

- Colocar  $G_p(s)$  nesta forma;
- Tomar malha fechada de realimentação



- Função de transferência em malha fechada:

$$T_p(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)}, \quad (38)$$

- Denominador não está na forma  $1 + KG(s)$  com  $K \in [0, \infty) \Rightarrow$  não se podem usar as regras de traçado do LGR para estudar as posições dos polos de  $G_p(s)$  conforme  $z$  varia no intervalo  $[0, \infty)$ .



### Exemplo 3 - continuação

- Reescrever o denominador de  $T_p(s)$ :

$$\begin{aligned}
 1 + G_p(s) &= 1 + \frac{s + z}{s^2 + 2s + 10} = \frac{s^2 + 2s + 10 + s + z}{s^2 + 2s + 10} \\
 &= \frac{s^2 + 3s + 10 + z}{s^2 + 2s + 10}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

- Encontrar as soluções de  $1 + G_p(s) = 0$  (polos de malha fechada): raízes do polinômio  $s^2 + 3s + 10 + z$ ;
- Função auxiliar  $G_p^{aux}(s)$

$$\frac{s^2 + 3s + 10 + z}{s^2 + 3s + 10} = 1 + zG_p^{aux}(s), \tag{40}$$

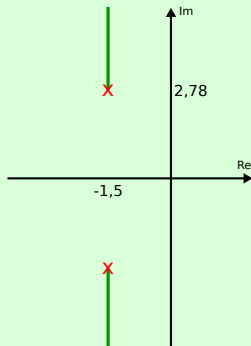
com

$$G_p^{aux}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}, \tag{41}$$



### Exemplo 3 - continuação

- Determinar as raízes de  $1 + G_p(s)$  como função de  $z \in [0, \infty)$  usando as técnicas de traçado de LGR para  $G_p^{aux}(s)$ ;
- Denominador de  $G_p^{aux}(s)$ :  $s^2 + 3s + 10$  (cujas raízes são  $-1,5 \pm j2,78$ );



# LGR para ganho negativo

- Restrição  $K \in [0, \infty)$ ;
- Comportamento das raízes para  $K \in (-\infty, 0]$ :
  - condição de fase será:

$$\angle G(s) = 0 + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (42)$$

uma vez que  $G(s) = -1/K$  com  $K < 0$  é um número real **positivo**.

- Alteram-se as regras que dependem diretamente da fase:
  - 1 A regra para os ramos no eixo real muda para trechos com **número par de raízes à direita**;
  - 2 Os ângulos das assíntotas passam a ser dados por

$$\theta_i = \frac{\angle G(re^{j\theta})}{m-n} = \frac{(i-1)360^\circ}{m-n}, \quad 1 \leq i \leq n-m. \quad (43)$$



- Os ângulos de partida de polos e de saída de zeros ficam:

$$\phi_p = \sum_k \angle(p - z_k) - \sum_i \angle(p - p_i), \quad (44)$$

para o ângulo de partida de um polo simples  $p$ , e

$$\phi_c = -\sum_k \angle(z - z_k) + \sum_i \angle(z - p_i), \quad (45)$$

para o ângulo de chegada de um zero simples  $z$ .

- Regras para ponto de saída/entrada no eixo real, centroide das assíntotas e pontos de cruzamento do eixo imaginário permanecem as mesmas.





# Continuidade do LGR

- Expressão na forma do LGR:

$$1 + KG(s) = 0, \quad (46)$$

- Obter o LGR para variações de ganho em torno de um valor nominal:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (47)$$

e

$$K = K_0 + \delta K, \quad (48)$$

em que  $K_0$  é um valor nominal fixo e  $\delta K$  é variável.

- Reescrever (46) como

$$1 + K_0G(s) + \delta KG(s) = 0 \Rightarrow q(s) + K_0p(s) + \delta Kp(s) = 0. \quad (49)$$



$$1 + K_0G(s) + \delta KG(s) = 0 \Rightarrow q(s) + K_0p(s) + \delta Kp(s) = 0.$$

- Dividindo o lado direito de (49) por  $q(s) + K_0p(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{q(s) + K_0p(s) + \delta Kp(s)}{q(s) + K_0p(s)} &= 0 \\ \Rightarrow 1 + \frac{\delta Kp(s)}{q(s) + K_0p(s)} &= 1 + \delta K \underbrace{\frac{p(s)}{q(s) + K_0p(s)}}_{\delta G(s)}, \end{aligned} \quad (50)$$

que tornou a ficar com a forma padrão do LGR;

- Polos MA de  $\delta G(s)$  são os polos MF de  $G(s)$  com ganho  $K = K_0$ ;
- Zeros de  $\delta G(s)$  são os mesmos de  $G(s)$ ;
- LGR de  $\delta G(s)$  para  $\delta K \in [0, \infty)$  resultará na **continuação** do LGR de  $G(s)$  a partir dos polos de MF quando  $K = K_0$ .
- Propriedade útil para construir o LGR de determinadas funções.

