



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 22 - Atraso de fase no plano s

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

17 de maio de 2018

- Relembrando: atraso de fase aumenta as constantes de ganho do sistema, sem alterar significativamente o comportamento no regime transitório \sim sem mudar significativamente a posição do par de polos dominantes.

Example 1.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0,5)}, \quad (1)$$

Requisitos em MF:

- $M_p \leq 0,16 \Rightarrow \xi \geq 0,5 \Rightarrow \arccos(\xi) \leq 60^\circ$ para uma entrada degrau,
- $t_{s2\%} \leq 5s \Rightarrow \sigma \geq \frac{|\ln 0,02|}{5} = 0,8 \text{ rad/s}$ para uma entrada degrau,
- Erro em regime estacionário para entrada rampa $e_{ss,r} \leq 0,1$.

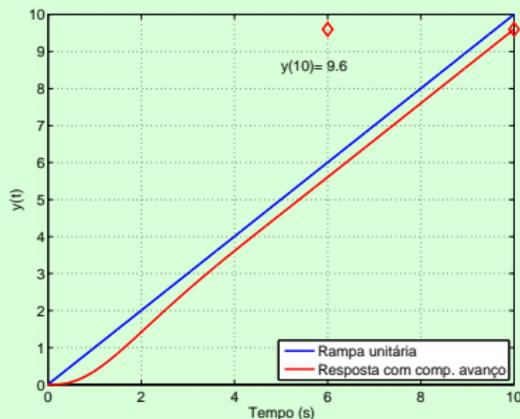


Exemplo 1 - continuação

- Exemplo da aula 21: compensador de avanço de fase para atender aos dois primeiros requisitos:

$$C(s) = K \frac{s+z}{s+p} = 5 \frac{s+1}{s+4}, \quad (2)$$

- Resposta simulada ao degrau em MF: $M_p = 0,16$ e $t_{s2\%} = 3,96$ s
 \Rightarrow atende aos requisitos de regime transitório;



Exemplo 1 - continuação

- $e_{ss,r} \approx 0,4$, portanto quatro vezes superior ao desejado \Rightarrow compensador de atraso de fase:

$$C_{at}(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad a > b > 0, \quad (3)$$

visto que

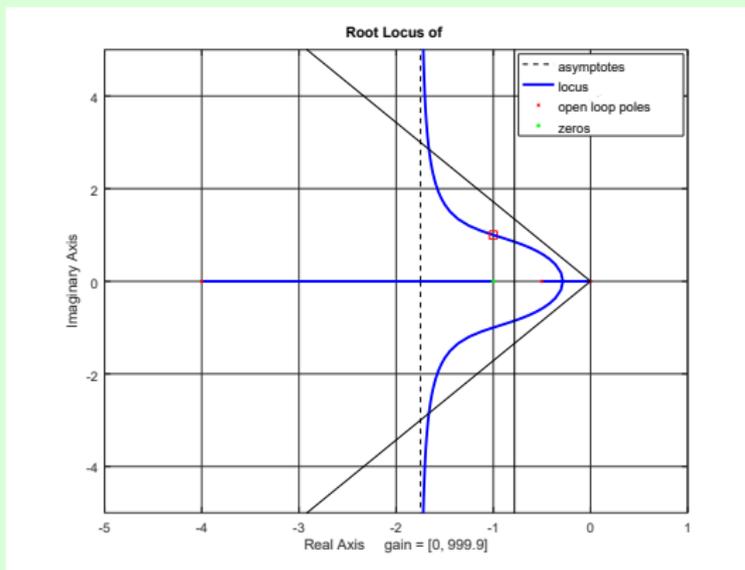
$$\lim_{s \rightarrow 0} C_{at}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+a}{s+b} = \frac{a}{b}. \quad (4)$$

- Ganho **estático devido ao compensador de atraso de fase é** $\frac{a}{b}$.



Exemplo 1 - continuação

- Domínio da frequência: mitigar efeito do compensador de atraso de fase na resposta transitória $a \ll \omega_c$.
- No plano s: se deseja que o LGR não sofra grandes alterações, pois os polos dominantes já estão em posições desejadas;



Exemplo 1 - continuação

- Estratégia para selecionar a e b em (4): colocá-los muito mais próximos ao eixo imaginário do que os polos dominantes;
- Projeto do atraso de fase dividido nas seguintes etapas:
 - 1 Determine a razão $\frac{a}{b}$ a partir do ganho estático desejado,
 - 2 Determine a de tal forma que fique “suficientemente” mais próximo do eixo imaginário do que os polos dominantes (**pelo menos 10 vezes**).
- Exemplo atual $e_{ss,r} = 0,4$ e desejado é $0,1$;
- $e_{ss,r} = \frac{1}{K_v} \Rightarrow$ aumentar K_v em quatro vezes:

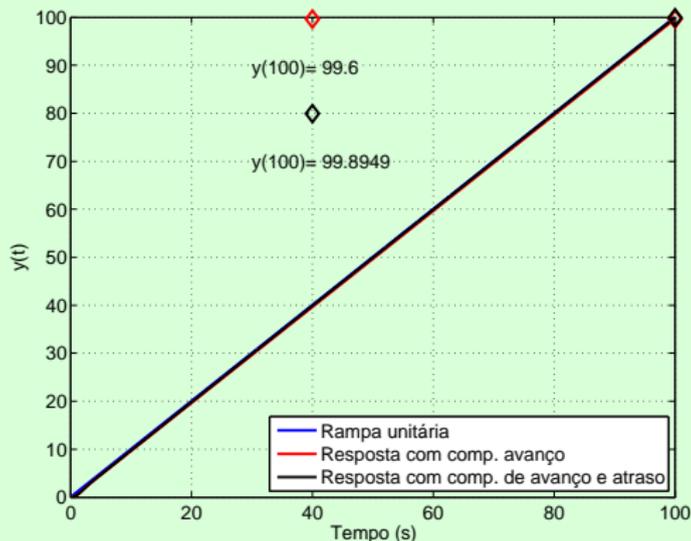
$$\frac{a}{b} = 4. \quad (5)$$

- Polos dominantes: $\text{Re}\{\square\} = -1 \Rightarrow a \leq -\frac{\text{Re}\{\square\}}{10} = 0,1$;
- Escolher $a = 0,04 \Rightarrow b = 0,01 \Rightarrow C_{at}(s) = \frac{s+0,04}{s+0,01}$.



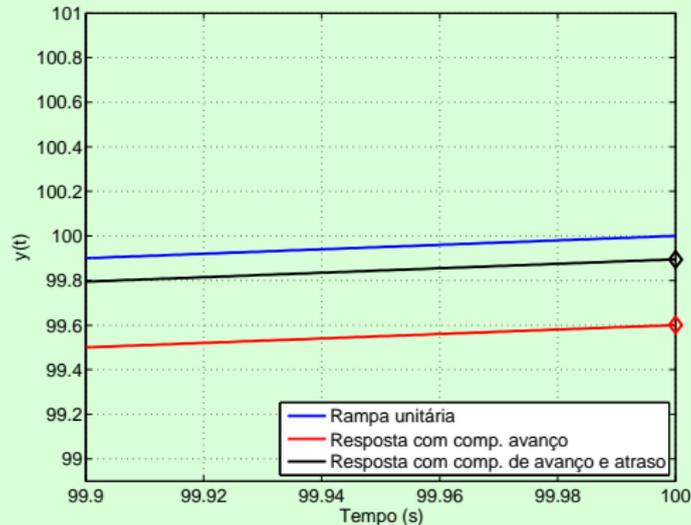
Exemplo 1 - continuação

- Resposta para entrada rampa: erro em regime estacionário
 $e_{ss,r} = 0,1$;
- Tempo de simulação foi de $100s$ para que o erro convergisse para este valor.



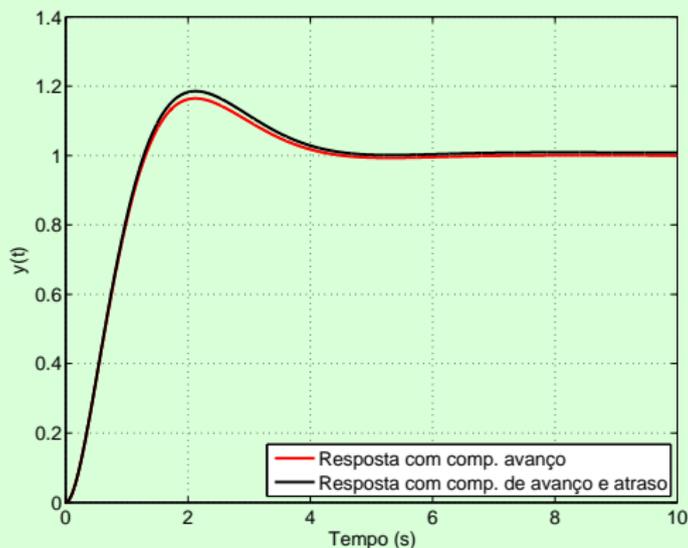
Exemplo 1 - continuação

- Resposta para entrada rampa: erro em regime estacionário
 $e_{ss,r} = 0,1$;
- Tempo de simulação foi de $100s$ para que o erro convergisse para este valor.



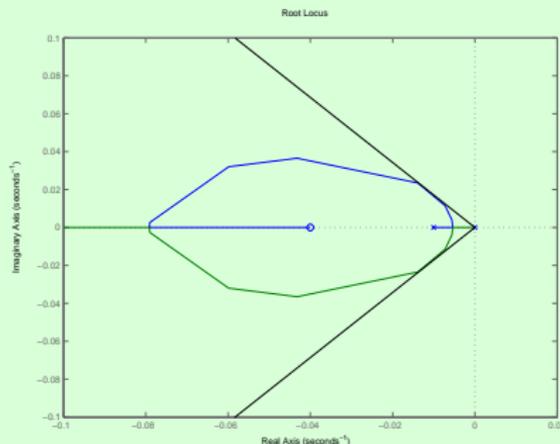
Exemplo 1 - continuação

- Resposta ao degrau: diferença pequena, colocando o compensador de atraso de fase o sistema aparenta estar menos amortecido (maior sobressinal).



Exemplo 1 - continuação

- LGR ainda parece passar pelos polos desejados $\square = -1 + 1j$ e $\bar{\square} = -1 - 1j$;
- Contudo, há um novo ramo perto da origem;
- Ampliando esta região: há um ramo adicional por causa do novo polo do compensador de atraso de fase, que pode gerar um polo com parte real pequena, isto é, um modo mais lento;

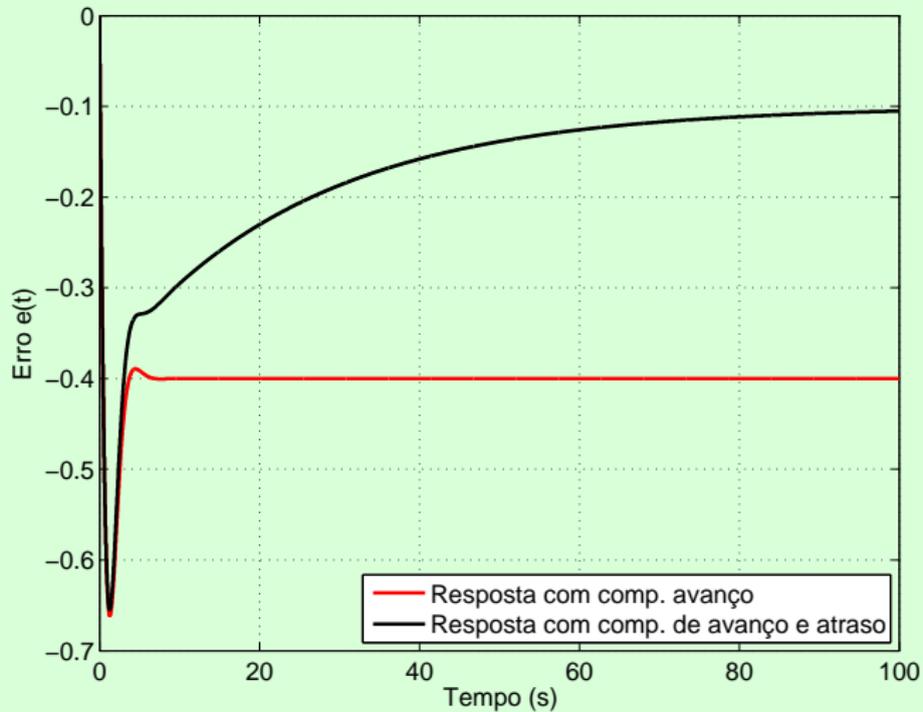


Exemplo 1 - continuação

- Calculando os polos de MF, têm-se: $s_{1,2} = -0,97 \pm 1j$, $s_3 = -2,53$ e $s_4 = -0,0405$;
- Três primeiros são apenas levemente diferentes dos polos de MF apenas com o compensador de avanço de fase ($s_{1,2} = -1 \pm 1j$, $s_3 = -2,5$);
- Quarto polo constitui um modo bem lento e está mais afastado do eixo imaginário do que o zero do compensador de atraso de fase;
- Efeito do zero predomina na resposta ao degrau, implicando no menor amortecimento aparente;
- Polo muito mais lento em MF resulta em uma demora muito maior para convergência ao regime estacionário, explicando porque a curva com compensador de avanço e atraso demora mais para convergir (dentro de uma faixa) tanto na resposta ao degrau quanto à rampa.



Exemplo 1 - continuação



Compensador PI no plano s

- Requisito: erro em regime estacionário para uma determinada entrada deve ser reduzido a zero;
- No limite, o polo do compensador de atraso $\rightarrow 0 \Rightarrow$ constante de erro $\rightarrow \infty \Rightarrow e_{ss} \rightarrow 0$;
- Compensador pode conter um ganho para lidar com requisitos de transitório:

$$C_{PI}(s) = K \frac{s+a}{s} = K + \frac{Ka}{s} = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad (6)$$

em que há um termo proporcional ao erro com ganho K_p e um termo proporcional à integral do erro com ganho K_i , motivando o nome compensador **Proporcional-Integral (PI)**.



- Pode-se projetar o ganho K para lidar com os requisitos de transitório;
- Arbitrar o zero de modo a não afetar significativamente os polos dominantes;
- Compensador PI é útil quando:
 - 1 o LGR de $G(s)$ já passa pela região de desempenho, sendo o ajuste do ganho suficiente para alocar os polos em MF nas posições desejadas;
 - 2 o requisito de erro em regime estacionário é que este seja nulo, demandando a presença do integrador;
 - 3 pode-se colocar o zero suficientemente próximo do eixo imaginário (cerca de dez vezes menos afastado do que os polos dominantes), de modo a pouco alterar o comportamento no regime transitório.



Estratégia de projeto

Etapa 1: Cálculo do ganho K

- Escolher os polos dominantes desejados \square e $\bar{\square}$;
- Determinar ganho que alocará os polos de MF nestas posições:

$$K = \left| \frac{1}{G(\square)} \right|. \quad (7)$$



Etapa 2: Determinação do zero $-a$

- Zero não deve afetar significativamente os polos dominantes desejados \square e $\bar{\square}$:

$$a \leq -\frac{\text{Re}\{\square\}}{10}. \quad (8)$$

- **Ressalva: é imprescindível conhecer o LGR de $G(s)$ e saber que alterações o compensador PI pode causar, visto que sua adição pode levar à instabilidade.**



Example 2.

- Função de transferência da planta:

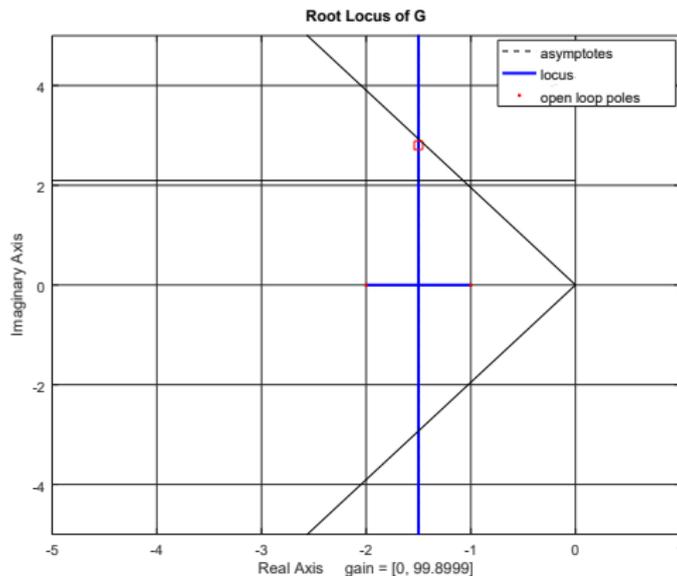
$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}. \quad (9)$$

- Requisitos para resposta ao degrau MF:
 - $M_p \leq 0,2 \Rightarrow \xi \geq 0,46 \Rightarrow \arccos(\xi) \leq 63^\circ$,
 - $t_p \leq 1,5s \Rightarrow \omega_d \geq \frac{\pi}{1,5} = 2,09 \text{ rad/s}$,
 - Erro em regime estacionário para entrada degrau $e_{ss,d} = 0$.



Exemplo 2 - continuação

- Região de requisitos de M_p e t_p intersecta LGR;
- Polos desejados escolhidos $\square = -1,5 + 2,8j$ e $\bar{\square} = -1,5 - 2,8j$:
 - $M_p = 0,186$ e
 - $t_p = 1,12s$,



Exemplo 2 - continuação

- Calcular ganho usando a Equação (7):

$$K = \left| \frac{(-1,5 + 2,8j + 1)(-1,5 + 2,8j + 2)}{5} \right| = 1,618. \quad (10)$$

- Constante de erro de posição será:

$$K_p = KG(0) = 1,618 \times \frac{5}{2} \approx 4,05, \quad (11)$$

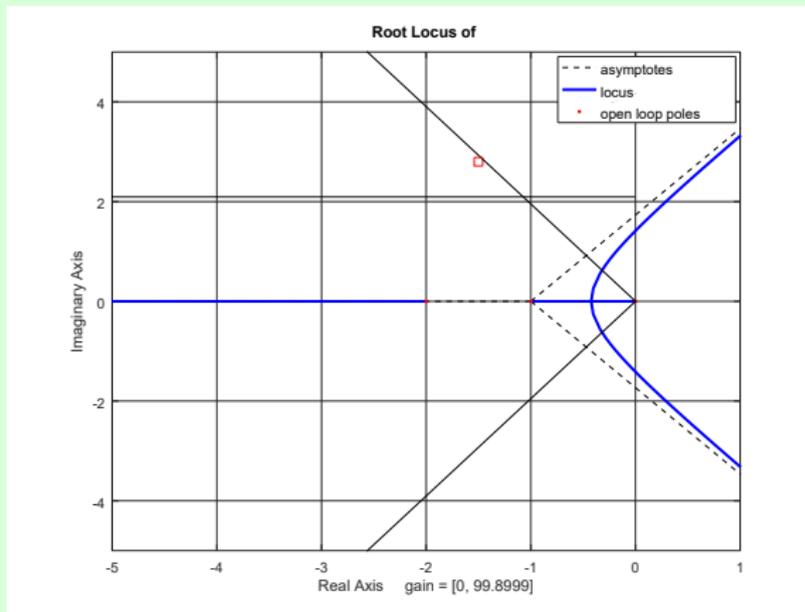
o que resulta em:

$$e_{ss,d} = \frac{1}{1 + K_p} \approx 0,198 > 0. \quad (12)$$



Exemplo 2 - continuação

- Incluir ação integral: resolve problema de e_{ss} mas pode desestabilizar o sistema:



Exemplo 2 - continuação

- Incluir um zero no SPE para atrair novamente os ramos do LGR;
- Optando por usar o valor limítrofe em (8)

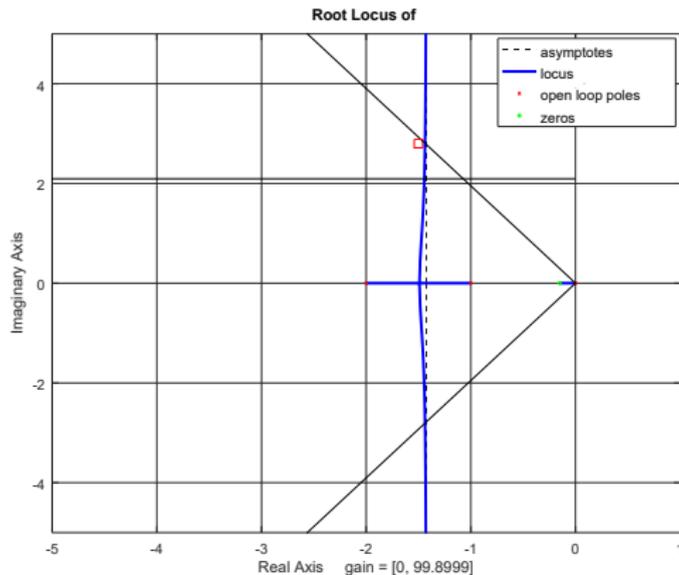
$$a = -\frac{-1,5}{10} = 0,15. \quad (13)$$

$$C_{PI} = 1,618 \frac{s+0,15}{s} = 1,618 + \frac{0,243}{s}. \quad (14)$$



Exemplo 2 - continuação

- Pequeno desvio do LGR com respeito aos polos desejados;
- Contudo: um polo de MF entre 0 e 0,15, mais próximo do eixo imaginário do que o zero \Rightarrow modo mais lento na resposta ao degrau.



Exemplo 2 - continuação

