



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 23 - PID no plano s

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

28 de maio de 2018

Estratégia de uso do PID

- Termos proporcional e derivativo podem ser usados para ajustar os polos de forma a fornecer o desempenho desejado no regime transitório;
- Termo integrativo aumenta o tipo do sistema, permitindo ajustar o erro em regime estacionário para um certo tipo de entrada.
- PID pode ser parametrizado como

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \quad (1)$$

em que K_p é o ganho proporcional, K_i é o ganho integrativo e K_d , o ganho derivativo.



Example 1.

- Planta cujo modelo é dado pela função de transferência

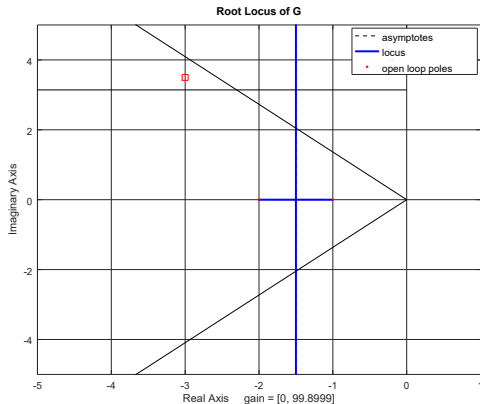
$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}. \quad (2)$$

- Requisitos para resposta ao degrau em malha fechada
 - $M_p \leq 0,1 \Rightarrow \xi \geq 0,59 \Rightarrow \arccos(\xi) \leq 53,8^\circ$,
 - $t_p \leq 1,0s \Rightarrow \omega_d \geq \frac{\pi}{1,0} = 3,14 \text{ rad/s}$,
 - Erro em regime estacionário para entrada degrau $e_{ss,d} = 0$.



Exemplo 1 - continuação

- Não há polos no LGR que atendem aos requisitos de sobressinal e tempo de pico simultaneamente \Rightarrow necessário avanço de fase;
- Polos desejados $\square = -3 + 3,5j$ e $\bar{\square} = -3 - 3,5j \Rightarrow M_p = 0,068$ e $t_p = 0,9 s$.



Exemplo 1 - continuação

- Primeiro zero do PID deve influenciar *pouco* no LGR \Rightarrow suficientemente próximo do polo na origem do PID;
- Regra para escolha: $z_1 = -\text{Re}\{\square\}/10 \Rightarrow z_1 = 0,3$;
- Segundo zero deve ser calculado para que o compensador PID forneça a fase desejada no polo \square :

$$\angle C_{PID}(\square)G(\square) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ. \quad (3)$$

Calculando

$$\angle C_{PID}(\square) = \angle(\square + z_1) + \angle(\square + z_2) - \angle(\square), \quad (4)$$

pode-se isolar

$$\phi = \angle(\square + z_2) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ - \angle G(\square) - \angle(\square + z_1) + \angle(\square). \quad (5)$$



Exemplo 1 - continuação

$$\phi = \angle(\square + z_2) \Rightarrow z_2 = -\operatorname{Re}\{\square\} + \frac{\operatorname{Im}\{\square\}}{\tan(\phi)}. \quad (6)$$

Aplicando os valores deste exemplo

$$\phi = 48,6^\circ \quad (7)$$

$$z_2 = 3 + \frac{3,5}{\tan(48,6^\circ)} = 6,08. \quad (8)$$

Calcular o ganho impondo que

$$|C_{PID}(\square)G(\square)| = 1, \quad (9)$$

donde

$$K \left| \frac{(\square + z_1)(\square + z_2)}{\square} G(\square) \right| = 1. \quad (10)$$



Exemplo 1 - continuação

Finalmente, isolando

$$K = \frac{|\square|}{|(\square + z_1)(\square + z_2)G(\square)|} \quad (11)$$

Substituindo os valores do exemplo atual:

$$K = 0,656. \quad (12)$$

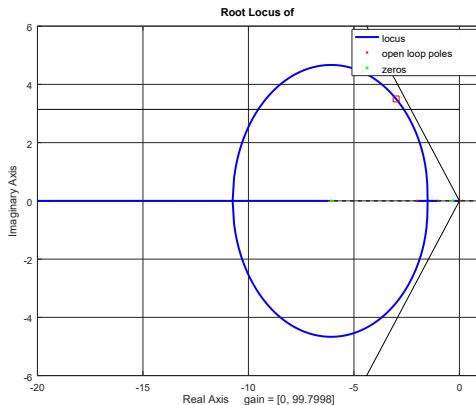
Assim, o compensador resultante é:

$$C_{PID}(s) = 0,656 \frac{(s + 0,3)(s + 6,08)}{s} = 4,19 + \frac{1,20}{s} + 0,656s. \quad (13)$$



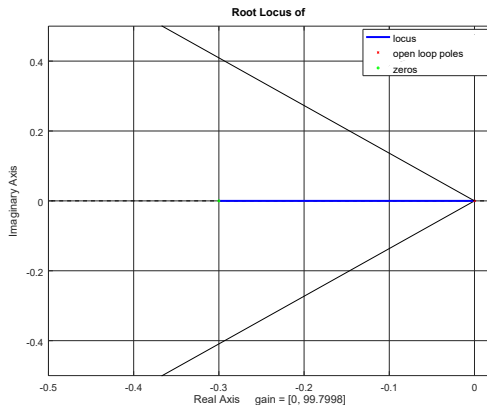
Exemplo 1 - continuação

- LGR do sistema compensado $C_{PID}(s)G(s) \rightarrow$ passagem pelos polos desejados;
- Um polo de MF entre 0 e 0,3, mais próximo do eixo imaginário do que o zero \Rightarrow modo mais lento na resposta ao degrau.



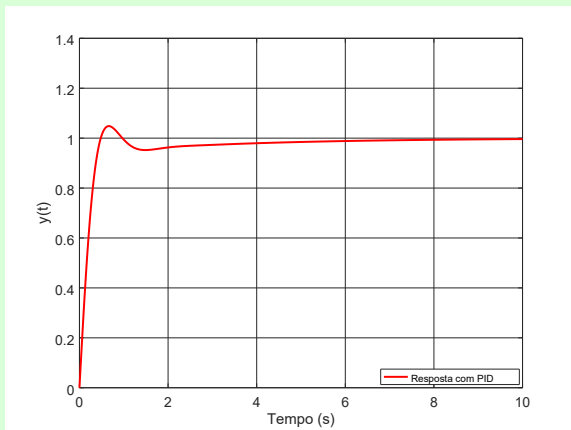
Exemplo 1 - continuação

- LGR do sistema compensado $C_{PID}(s)G(s) \rightarrow$ passagem pelos polos desejados;
- Um polo de MF entre 0 e 0,3, mais próximo do eixo imaginário do que o zero \Rightarrow modo mais lento na resposta ao degrau.



Exemplo 1 - continuação

- $t_p \approx 0,65 s < 1 s$;
- $M_p = 5\%$ devido ao polo que o PID insere próximo da origem.



- Estratégia de projeto utilizada no exemplo 1 inspirada no projeto do compensador de avanço e atraso de fase:
 - um zero do PID (equivalente ao zero do compensador de avanço) para satisfazer a condição de fase (note que o polo foi tomado como $s \rightarrow \infty$);
 - outro zero suficientemente à direita do par de polos dominantes de maneira a influenciar *pouco* no LGR (semelhante ao zero do compensador de atraso)
 - polo do compensador PID foi colocado em $s = 0$ (caso limite do polo do compensador de atraso);
- Contudo, o fato de o PID apresentar dois zeros pode ser usado como um grau de liberdade extra.



Example 2.

- Mesma planta e mesmos os requisitos dados no exemplo 1;
- Ambos os zeros do PID na mesma posição, i. e., $z_1 = z_2$.
- Condição de ângulo da Equação (4) com $z_1 = z_2 = z$:

$$\angle C_{PID}(\square) = 2\angle(\square + z) - \angle(\square), \quad (14)$$

pode-se isolar

$$\phi = 2\angle(\square + z) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ - \angle G(\square) + \angle(\square). \quad (15)$$



Exemplo 2 - continuação

$$\phi = 2\angle(\square + z) \Rightarrow z = -\operatorname{Re}\{\square\} + \frac{\operatorname{Im}\{\square\}}{\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)}. \quad (16)$$

Aplicando os valores deste exemplo

$$\phi = 176,3^\circ \quad (17)$$

$$z = 3 + \frac{3,5}{\tan\left(\frac{176,3^\circ}{2}\right)} = 3,11. \quad (18)$$



Exemplo 2 - continuação

Calcular o ganho impondo a igualdade dada na Equação (9) considerando $z_1 = z_2 = z$

$$K \left| \frac{(\square + z)^2}{\square} G(\square) \right| = 1. \quad (19)$$

Isolando

$$K = \frac{|\square|}{|(\square + z)^2 G(\square)|}. \quad (20)$$

Substituindo os valores do exemplo atual:

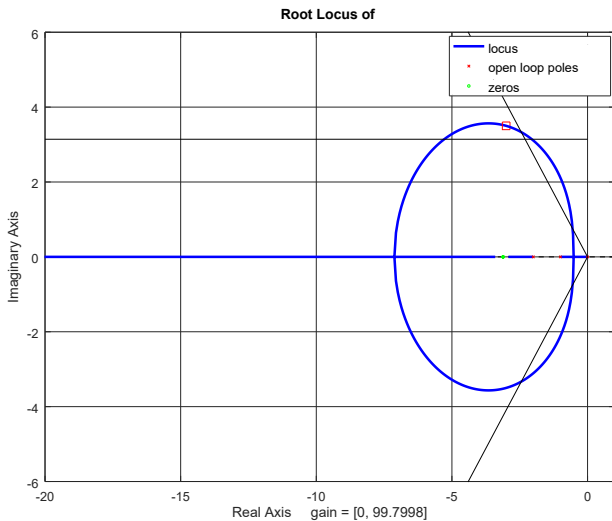
$$K = 1,10. \quad (21)$$

Compensador resultante

$$C_{PID}(s) = 1,10 \frac{(s + 3,11)^2}{s} = 6,87 + \frac{10,7}{s} + 1,10s. \quad (22)$$



Exemplo 2 - continuação



Exemplo 2 - continuação

- $t_p \approx 0,52 s < 1 s$
- $M_p = 18\%$: aumento no sobressinal.
- Terceiro polo $s = -2,52 \rightarrow$ dois zeros em $s = -3,11$ predominam na resposta.

