



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 24 - Lidando com o retardo de tempo no plano S

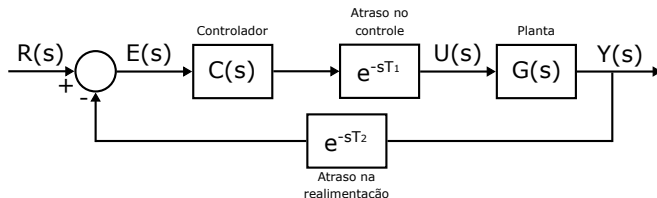
Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

5 de junho de 2018

Lidando com o retardo de tempo no plano s

- Retardo de tempo na malha \Rightarrow polos podem ser alterados;
- Conceitualmente diferenciar dois tipos de retardo:
 - 1 **na entrada (no sinal de controle)**: motivado pelo tempo que leva para o controlador determinar o sinal a ser aplicado (atualmente, com boa parte dos controladores sendo implementados em computadores digitais, há um atraso inerente aos cálculos para se determinar o sinal de controle) ou por um retardo na resposta do atuador;
 - 2 **na realimentação**: sensor pode demorar a realizar uma medição ou só pode medir a variável depois de um certo tempo;



Observação 1.

Ambas as forma de retardo discutidas podem surgir em sistemas controlados via rede, onde o controlador e o sistema não estão fisicamente no mesmo lugar, havendo retardos devido aos laços de comunicação na leitura que deve ser transmitida ao controlador remoto e no sinal de controle que deve ser transmitido do controlador para a planta. Este é um tópico que vem ganhando relevância nos últimos anos.



- $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau}X(s)$, τ atraso puro;

Função de transferência:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sT_1}}{1 + C(s)G(s)e^{-sT_1}e^{-sT_2}}. \quad (1)$$

- Retardo na realimentação afeta apenas a posição dos polos (denominador de $T(s)$);
- Atraso no controle afeta tanto a posição dos polos quanto causa um atraso na saída de T_1 unidades de tempo.



Lógica de projeto para compensação

- 1 Se houver requisitos de tempo a serem respeitados, recalculá-los como $t'_* = t_* - T_1$, em que t_* pode ser o tempo de acomodação t_s , de subida t_r ou de pico t_p .
- 2 Determinar os polos dominantes desejados \square e $\bar{\square}$ a partir dos requisitos (considerando os novos requisitos de tempo, se houver).
- 3 Calcular polos e zeros do compensador para satisfazer:

$$\angle C(\square) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ - \angle G(\square) + \angle e^{\square(T_1+T_2)}, \quad (2)$$

em que o último termo do lado direito de (2) pode ser mais facilmente calculado

$$\angle C(\square) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ - \angle G(\square) + (T_1 + T_2) \operatorname{Im}\{\square\}. \quad (3)$$

- 4 Determinar o ganho do compensador para satisfazer:

$$|C(\square)| = \frac{|e^{\square(T_1+T_2)}|}{|G(\square)|} = \frac{e^{(T_1+T_2)\operatorname{Re}\{\square\}}}{|G(\square)|}. \quad (4)$$



Aproximação de Padé para o atraso

- Atraso de tempo: e^{-sT} no domínio transformado;
- Função analítica \Rightarrow aproximação por funções racionais:

$$G_{at}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}, \quad (5)$$

- $p(s)$ e $q(s)$ polinômios;
- Aproximação por função racional útil para obter função de transferência própria que represente (aproximadamente) o atraso;
- Permite aplicar técnicas que foram estudadas para funções de transferência próprias;
- Proposta de H. Padé: expansão em série de McLaurin de ambas as funções e igualar o maior número de coeficientes possível.



- Expansão de $e^{-sT} = e^{-x}$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (6)$$

- Para a função racional $G_{at}(s)$, é necessário escolher os graus dos polinômios $p(s)$ e $q(s)$;
- Escolhe-se $\text{grau } p(s) \leq \text{grau } q(s) \Rightarrow$ função de transferência própria;
- Por exemplo, escolhendo ambos de grau 1, pode-se escrever:

$$G_{at}(x) = K \frac{x+a}{x+b}, \quad (7)$$

$$G'_{at}(x) = K \frac{b-a}{(x+b)^2}, \quad (8)$$

$$G''_{at}(x) = K \frac{-(b-a)2(x+b)}{(x+b)^4}. \quad (9)$$



- Série de McLaurin de $G_{at}(x)$:

$$G_{at}(x) = G_{at}(0) + G'_{at}(0)x + G''_{at}(0)\frac{x^2}{2} + \dots \quad (10)$$

- Usando (7), (8) e (9) em (10):

$$G_{at}(x) = K\frac{b}{a} + K\frac{b-a}{b^2}x + K\frac{2(a-b)}{b^3}\frac{x^2}{2} + \dots \quad (11)$$

- Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau de (6) e (11):

$$K\frac{b}{a} = 1, \quad (12)$$

$$K\frac{b-a}{b^2} = -1, \quad (13)$$

$$K\frac{2(a-b)}{b^3} = 1. \quad (14)$$



- Resolvendo o sistema:

$$K = 2 \text{ ou } K = -1, \quad (15)$$

$$a = 4 \text{ ou } a = -2, \quad (16)$$

$$b = 2. \quad (17)$$

- $K = -1$ e $a = -2 \Rightarrow$ ganho unitário em baixas frequências:

$$G_{at}(x) = -1 \frac{x-2}{x+2} = \frac{1-x/2}{1+x/2}. \quad (18)$$

- Substituindo $x = sT$:

$$e^{-sT} \approx \frac{1-sT/2}{1+sT/2}. \quad (19)$$

- Aproximação tem um polo no SPE e um zero no SPD;
- Efeito desestabilizante do atraso de tempo: polo tende a repelir os ramos do LGR e zero os atrai;
- Ramos que não existiam no SPD podem passar a existir, especialmente para ganhos mais elevados.



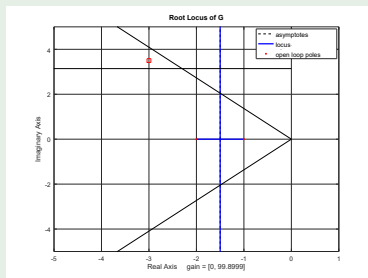
Observação 2.

A aproximação da Equação (19) é chamada aproximação de Padé (1,1), pois os graus dos polinômios são ambos 1. Uma aproximação de Padé (1,2), por exemplo, teria grau do numerador 1 e do denominador 2.



Example 1.

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}. \quad (20)$$



Requisitos para resposta ao degrau em malha fechada são:

- $M_p \leq 0,1 \Rightarrow \xi \geq 0,59 \Rightarrow \arccos(\xi) \leq 53,8^\circ$,
- $t_p \leq 1,0s \Rightarrow \omega_d \geq \frac{\pi}{1,0} = 3,14 \text{ rad/s}$,



Exemplo 1 - continuação

- Polos desejados $\square = -3 + 3,5j$ e $\bar{\square} = -3 - 3,5j$;
- Com estes polos, a resposta deve apresentar:
 - $M_p = 0,068$ e
 - $t_p = 0,9s$,
- Projeta-se um compensador de avanço de fase, em que fixamos a posição do polo em $s = -45$:

$$\angle(\square + z) = 180^\circ - \angle G(\square) + \angle(\square + p) = 50,4^\circ, \quad (21)$$

$$z = -\text{Re}\{\square\} + \frac{\text{Im}\{\square\}}{\tan(50,4^\circ)} = 5,89. \quad (22)$$

- Calculando o ganho:

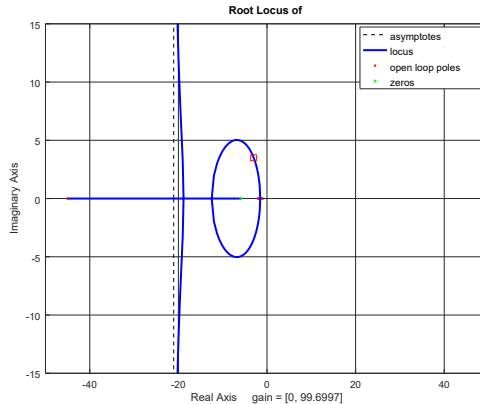
$$K = \frac{|\square + p|}{|(\square + z)G(\square)|} = 27,25. \quad (23)$$



Exemplo 1 - continuação

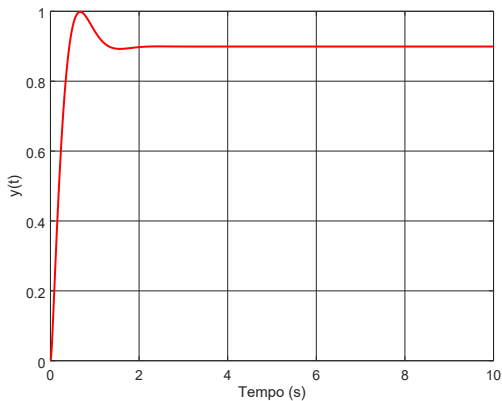
- Compensador resultante:

$$C(s) = 27,25 \frac{s + 5,89}{s + 45} \quad (24)$$



Exemplo 1 - continuação

- $M_p = 0,11$;
- $t_p = 0,67 s$.



Exemplo 1 - continuação

- Considerar dois retardos de tempo $T_1 = T_2 = 0,1s$;
- Aproximação de Padé (1,1), dada na Eq. (19), pode ser determinada fazendo-se $T = T_1 + T_2$:

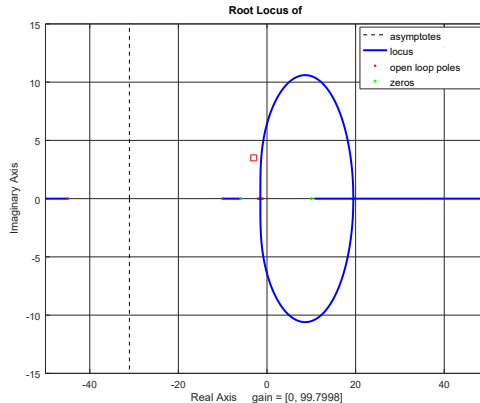
$$e^{-s0,2} \approx \frac{1 - 0,1s}{1 + 0,1s}, \quad (25)$$

- Introduzem-se um zero em $s = -10$ e um polo em $s = 10$.



Exemplo 1 - continuação

- LGR não mais passa pelos polos desejados \Rightarrow altera o desempenho transitório;
- Há ramos do LGR no SPD, o que pode levar à instabilidade em MF.



Exemplo 1 - continuação

Reprojetando o compensador para passar nos polos desejados de acordo com o procedimento descrito:

- 1 Não há necessidade de se redeterminarem os polos desejados porque o requisito de tempo de pico já seria satisfeito com eles mesmo deslocando a resposta de 0,1 s.
- 2 Uma vez que fixamos $p = 45$, tem-se:

$$\angle C(\square) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ - \angle G(\square) + (T_1 + T_2) \operatorname{Im}\{\square\}, \quad (26)$$

que resulta em

$$\angle(\square + z) = 180^\circ - \angle G(\square) + \angle(\square + p) = 90,5^\circ, \quad (27)$$

em que se nota que a fase mudou consideravelmente por conta do atraso quando comparada com (27).



Exemplo 1 - continuação

- 3 Assim:

$$z = -\operatorname{Re}\{\square\} + \frac{\operatorname{Im}\{\square\}}{\tan(90,5^\circ)} = 2,97. \quad (28)$$

- 4 O ganho do compensador deve satisfazer:

$$|C_{at}(\square)| = \frac{|e^{\square(T_1+T_2)}|}{|G(\square)|} = \frac{e^{(T_1+T_2)\operatorname{Re}\{\square\}}}{|G(\square)|}. \quad (29)$$

donde

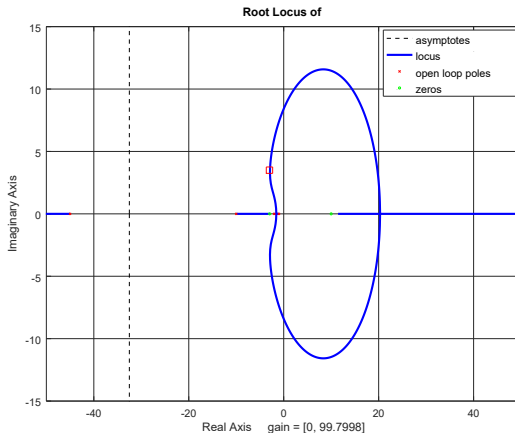
$$K = 19,39. \quad (30)$$



Exemplo 1 - continuação

- Compensador resultante:

$$C_{at}(s) = 19,39 \frac{s + 2,97}{s + 45}. \quad (31)$$



Exemplo 1 - continuação

- 1 Sem reprojeto: desempenho muito degradado, consideravelmente mais oscilatório → tendência à instabilização
- 2 Com reprojeto: $M_p = 0,13$ e $t_p = 1,02$ s.

