Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 3 - Transformada de Laplace

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

1 de março de 2018

Resolução da EDO

- Após obter o modelo matemático, estamos interessados na resposta temporal do sistema a uma entrada.
- Modelo dado na forma de EDO $\rightarrow$ encontrar sua solução.

Por exemplo, para o modelo da equação

$$\delta\ddot{\theta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)\delta\theta, \tag{1}$$

a solução tem a seguinte forma:

$$\delta\theta(t) = A\cos\left[t\sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2} + \phi\right] \tag{2}$$

em que A e ϕ dependem das condições iniciais (CI), i. e., $\delta\theta(t_0) = \delta\theta_0$ e $\delta\dot{\theta}(t_0) = \delta\dot{\theta}_0$.

Seja o modelo

$$\frac{dy}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} y = \frac{du}{dt} + \frac{1}{R_1 C} u, \tag{3}$$

há dependência da entrada $u(t)$.

Vamos assumir que a entrada seja a função **degrau unitário**, representada por:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

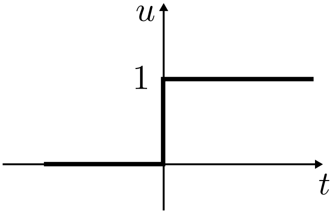


Figura: Degrau unitário.

- A função $\delta(t)$, chamada de **impulso unitário**, é aquela cuja integral resulta em $\mathbf{1}(t)$. [1]
- Propriedade da Filtragem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \tag{5}$$

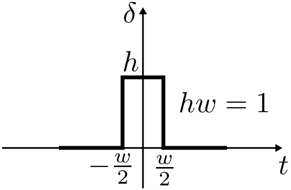


Figura: Impulso unitário: $w \to 0 \Rightarrow h \to \infty$ para que o produto $hw = 1$.

[1] Sua definição como função foge ao escopo deste curso, mas esta pode ser construída a partir do limite de um pulso centrado em 0 de largura arbitrariamente pequena, cuja área é unitária. Isso só pode ocorrer caso a altura tenda a ∞ conforme a largura tende a 0.

Retornando à equação (3), teremos:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha_0 y = \delta(t) + \beta_0 \mathbf{1}(t) \tag{6}$$

Utilizando o fator integrante $e^{\alpha_0 \tau}$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(y(\tau)e^{\alpha_0 \tau}\right) d\tau = \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)e^{\alpha_0 \tau} d\tau + \int_{t_0}^{t} \beta_0 \mathbf{1}(\tau)e^{\alpha_0 \tau} d\tau \tag{7}$$

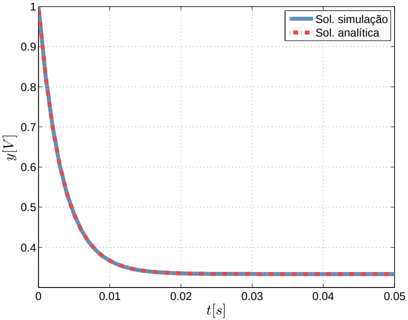
Supondo que o instante inicial seja $t_0 = 0^-$:

$$y(t)e^{\alpha_0 t} - y(0) = 1 + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\left(e^{\alpha_0 t} - 1\right) \tag{8}$$

Donde:

$$y(t) = y(0)e^{-\alpha_0 t} + \left(1 - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)e^{-\alpha_0 t} + \frac{\beta_0}{\alpha_0}. \tag{9}$$

Simulação numérica versus solução analítica para $R_1 = 100k\Omega$, $R_2 = 50k\Omega$ e $C = 100nF$ e $y(0) = 0$.



- Processo de solução analítica complexo e enfadonho à medida em que a ordem da EDO aumenta e que se devem considerar diversas entradas distintas;
- Saída: transformar a EDO em uma equação algébrica e usar a **Transformada de Laplace**.

Transformada de Laplace

- Mapeia funções reais em funções complexas de argumentos complexos;
- A transformada de Laplace de $f(t)$ é definida como:

Definição 1 (Transformada de Laplace).

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{10}$$

Observação 1.

Usaremos notação $F(s)$ *para representar* $\mathcal{L}\{f(t)\}$*, isto é, escreveremos a função no domínio transformado usando a mesma letra do sinal no domínio do tempo, só que usando caixa alta e explicitando o argumento* $s \in \mathbb{C}$*.*

Observação 2.

Caso o sinal $f(t)$ *seja contínuo por partes em cada intervalo finito em* $[0,\infty)$*, satisfazendo*

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \tag{11}$$

para todo $t \in [0,\infty)$*, então a integral em* (10) *existe* $\forall s|\mathrm{Re}\{s\} > a$*.*

Observação 3.

A transformada de Laplace é única, i. e., dados dois sinais $f_1(t)$ *e* $f_2(t)$ *com a mesma transformada*

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}, \tag{12}$$

então o terorema de Lerch garante que a integral

$$\int_0^a n(t)dt = 0, \; \forall a > 0, \tag{13}$$

para a função nula $n(t) = f_1(t) - f_2(t)$.

- *Com isso, conclui-se que* $f_1(t)$ *e* $f_2(t)$ *só podem diferir em um conjunto de medida nula;*
- *Caso sejam contínuas, serão, obrigatoriamente, iguais em todos os pontos.*

Observação 4.

A transformada de Laplace é linear, pois

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\gamma_1 f_1(t)+\gamma_2 f_2(t)\} = & \int_0^\infty [\gamma_1 f_1(t)+\gamma_2 f_2(t)]\, e^{-st} dt \\ & \int_0^\infty \gamma_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty \gamma_2 f_2(t) e^{-st} dt \\ & \gamma_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \gamma_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ & \gamma_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \gamma_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Observação 5.

A transformada de Laplace de um sinal deslocado no tempo é

$$\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\} = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(\sigma)e^{-s(\sigma+\tau)}d\sigma$$
$$e^{-s\tau}\int_0^\infty f(\sigma)e^{-s\sigma}d\sigma = e^{-s\tau}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}. \qquad (15)$$

Observação 6.

A transformada de Laplace da convolução de dois sinais é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = & \int_0^\infty [f_1(t)*f_2(t)]\,e^{-st}dt \\
& \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] e^{-st}dt \\
& \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\int_0^\infty f_1(t-\tau)e^{-st}dt}_{Obs.5 \Rightarrow e^{-s\tau}\mathcal{L}\{f_1(t)\}} f_2(\tau)d\tau \\
& \int_{-\infty}^\infty F_1(s)e^{-s\tau}f_2(\tau)d\tau = F_1(s)\underbrace{\int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau}f_2(\tau)d\tau}_{\tau<0 \Rightarrow f_2(\tau)=0} \\
& F_1(s)\int_0^\infty e^{-s\tau}f_2(\tau)d\tau = F_1(s)F_2(s).
\end{aligned}
$$

Observação 7.

A transformada de Laplace da derivada de um sinal é

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \underbrace{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt}_{\text{integrando por partes}} = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$-f(0) + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \quad (16)$$

Aplicando recursivamente este resultado:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = -\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}\frac{d^i f(0)}{dt^i} + s^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \quad (17)$$

Observação 8.

De maneira similar à Obs. 7

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \tag{18}$$

Observação 9.

A derivada da transformada de Laplace de um sinal é

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}{ds} = \int_0^\infty f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt$$
$$-\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \tag{19}$$

Observação 10.

A transformada de Laplace de um sinal multiplicado por e^{at} é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt}_{\sigma=s-a}$$

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt = F(\sigma) = F(s-a). \tag{20}$$

Observação 11.

Quando existirem os limites, a seguinte equação se verifica:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s). \tag{21}$$

*Este resultado é conhecido como **teorema do valor final**.*

Obtendo transformada de Laplace de variados sinais

À partir da transformada de um sinal conhecido, podem-se usar as propriedades demonstradas para obter as transformadas de outros sinais sem ter que recorrer à definição.

Example 2.

A partir da definição, pode-se calcular, por exemplo, a transformada de Laplace do sinal impulso.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \underbrace{\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt}_{\text{Prop. de Filtragem do impulso}} = 1. \tag{22}$$

Agora, podemos recorrer à Obs. 8 para determinar a transformada de Laplace do degrau unitário como

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int \delta(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \frac{1}{s}. \tag{23}$$

- Obs. 7 e a linearidade permitem obter a equação transformada no domínio-s (também chamado de domínio da frequência) que representa uma EDO:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\frac{d^iy(t)}{dt^i}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{m}\beta_k\frac{d^ku(t)}{dt^k}\right\} \tag{24}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\mathcal{L}\left\{\frac{d^iy(t)}{dt^i}\right\} = \sum_{k=0}^{m}\beta_k\mathcal{L}\left\{\frac{d^ku(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\sum_{l=0}^{i-1}s^l\frac{d^ly(0)}{dt^l}+s^lY(s) = \sum_{k=0}^{m}\beta_k\sum_{l=0}^{k-1}s^l\frac{d^lu(0)}{dt^l}+s^kU(s)$$

- Dispondo da transformada de Laplace de $u(t)$ e das CI, pode-se calcular $Y(s)$.
- Então, se pode usar a **transformada inversa de Laplace** para obter $y(t)$.

Transformada inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace (também chamada integral de Bromwich) é definida como:

Definição 3 (Transformada inversa de Laplace).

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st}ds, \tag{25}$$

em que γ deve ser escolhido de modo que todas as singularidades de $F(s)$ estejam à esquerda do contorno.

- Avaliar a integral em (25) pode ser tão complexo quanto resolver a EDO;
- Solução: construir tabelas de transformadas de Laplace para certos sinais e manipular as razões de polinômios na equação (24) para obter linhas conhecidas da tabela;
- **CI nulas**:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i Y(s) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k s^k U(s) \tag{26}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} \beta_k s^k}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i}; \tag{27}$$

- $G(s)$ é chamada **função de transferência** do sistema, pois relaciona a transformada de Laplace de qualquer sinal de entrada à transformada de Laplace da saída;
- As raízes do polinômio do numerador de $G(s)$ são chamadas de **zeros** da função de transferência;
- As raízes do denominador de $G(s)$ são chamadas de **polos** da função de transferência.

Resposta de um sistema ao impulso unitário e sua função de transferência

- Assumindo que a resposta de um sistema LIT ao impulso unitário seja data por $h(t)$, tem-se que:

$$h(t) = y[\delta(t)] \tag{28}$$

- Uma entrada arbitrária $u(t)$ pode ser escrita como (vide Prop. de Filtragem do Impulso):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{29}$$

- Como o sistema é LIT:

$$\begin{aligned} y[u(t)] =& y\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)y\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau \\ & \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t)*u(t) \end{aligned} \tag{30}$$

- **A resposta de um sistema LIT a uma entrada arbitrária é a convolução de sua resposta ao impulso com esta entrada**;
- Da Obs. 6, pode-se tomar a transformada de Laplace de (30):

$$Y(s) = H(s)U(s); \tag{31}$$

- De (27) e (31) $\rightarrow$ **função de transferência é numericamente igual à resposta ao impulso do sistema**;
- Determinar a função de transferência de um sistema experimentalmente: aplicar um pulso curto de amplitude razoável para simular um impulso com o grau de fidelidade necessário, observar a saída no tempo e tomar a transformada de Laplace.

Uso de tabelas de transformadas

- Facilidade: obter as transformadas de Laplace de tabelas e calcular rapidamente a resposta temporal sem ter que resolver a EDO;

Na tabela a seguir apresentam-se alguns pares de funções no domínio do tempo e as transformadas de Laplace associadas.

Transformadas de Laplace selecionadas

Função $f(t)$	Transformada $F(s)$
1	$1/s$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$n!/s^{n+1}$
$t^{1/2}$	$\frac{1}{2}(\pi/s^3)^{1/2}$
$t^{-1/2}$	$\left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\operatorname{sen}(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
$t\operatorname{sen}(\omega t)$	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
$t\cos(\omega t)$	$(s^2-\omega^2)/(s^2+\omega^2)^2$
$e^{at}t^n$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$e^{at}\operatorname{sen}(\omega t)$	$\omega/\left((s-a)^2+\omega^2\right)$
$e^{at}\cos(\omega t)$	$(s-a)/\left((s-a)^2+\omega^2\right)$
$\sinh(\omega t)$	$\omega/(s^2-\omega^2)$
$\cosh(\omega t)$	$s/(s^2-\omega^2)$
Impulso $\delta(t)$	1
Degrau unitário $\mathbf{1}(t)$	$1/s$

Resolução da EDO usando Transformada de Laplace

Example 4.

Modelo linear obtido por meio da eq. (1). Tomando a transformada de Laplace (usando a Obs. 9), tem-se:

$$s^2\delta\Theta(s) - \delta\dot{\theta}(0) - s\delta\theta(0) = \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)\delta\Theta(s). \tag{32}$$

Donde:

$$\left(s^2 + \frac{g}{a} - \omega^2\right)\delta\Theta(s) = \delta\dot{\theta}(0) + s\delta\theta(0). \tag{33}$$

Exemplo 4 - continuação

- CI: ângulo inicial $\delta\theta(0) = \delta\theta_0$ com velocidade nula $\delta\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\delta\Theta(s) = \frac{s\delta\theta_0}{s^2 + \frac{g}{a} - \omega^2}; \tag{34}$$

- Compatível com a transformada de Laplace da função cosseno na Tabela de transformadas, fazendo a seguinte correspondência entre parâmetros:

$$\frac{g}{a} - \omega^2 \leftrightarrow \omega^2, \tag{35}$$

  e levando em conta o escalonamento por $\delta\theta_0$;
- Solução:

$$\delta\theta(t) = \delta\theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2}\right). \tag{36}$$

Observação 12.

Muitas vezes, após linearizar o sistema, a notação de $\delta\bullet$ é suprimida, usando o mesmo nome da variável original $\bullet$ para indicar a variação em torno do ponto de operação. No caso da eq. (36)*:*

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2}\right), \tag{37}$$

poderia ser usado para representar as variações em torno de $\bar{\theta}$.

Example 5.

Retornando ao modelo obtido na equação (3) e tomando a transformada de Laplace:

$$sY(s) - y(0) + \alpha_0 Y(s) = sU(s) - u(0) + \beta_0 U(s). \tag{38}$$

Admitindo que $y(0) = 0$, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{s + \beta_0}{s + \alpha_0} U(s) - \frac{u(0)}{s + \alpha_0}. \tag{39}$$

Exemplo 5 - continuação

Se admitirmos que a entrada será $u(t) = \mathbf{1}(t)$, então $u(0) = 1$ e $U(s) = 1/s$, donde:

$$Y(s) = \frac{s+\beta_0}{s+\alpha_0}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha_0} = \frac{\beta_0}{s+\alpha_0}\frac{1}{s}. \tag{40}$$

Usando a Tabela de transformadas e a Obs. 8, a transformada inversa pode ser calculada como:

$$y(t) = \beta_0 \left. \frac{e^{-\alpha_0\tau}}{-\alpha_0} \right|_0^t = \frac{\beta_0}{\alpha_0}(1 - e^{-\alpha_0 t}). \tag{41}$$

Expansão em frações parciais

- Pode ser que a tabela de transformadas não contenha explicitamente a transformada inversa desejada;
- Interessante manipular a expressão no domínio complexo para obter funções cujas transformadas estejam tabeladas;
- Uma técnica: **expansão em frações parciais.**

Example 6.

Sistema da eq. (3), admitindo entrada senoidal de frequência ω:

$$U(s) = \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \tag{42}$$

Sinal de saída

$$Y(s) = \frac{s + \beta_0}{s + \alpha_0} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \tag{43}$$

Exemplo 6 - continuação

- Não há entrada correspondente na tabela de pares de funções e transformadas ao sinal da equação (43).
- **O que se faz, então?**
- Há disponíveis os pares de transformadas quando o denominador é polinômio de primeiro ou segundo grau na variável s, mas não de terceiro como no caso da equação (43).
- Uma saída: decompor o produto em soma de fatores com denominadores de primeiro e/ou segundo grau.

Da eq. (43), produto pode ser decomposto como:

$$\frac{s+\beta_0}{s+\alpha_0} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{a}{s+\alpha_0} + \frac{b}{s+j\omega} + \frac{c}{s-j\omega}. \tag{44}$$

Exemplo 6 - continuação

Recolocando o denominador comum do lado direito da eq. (44):

$$Y(s) = \frac{(a+b+c)s^2 + [(\alpha_0 - j\omega)b + (\alpha_0 + j\omega)c]\,s + a\omega^2 - bj\omega\alpha_0 + cj\omega\alpha_0}{(s+\alpha_0)(s^2+\omega^2)}. \quad (45)$$

Tendo em vista o resultado desejado no lado esquerdo da equação (44) e os valores dos coeficientes das potências de s do lado direito da equação (45), chegamos ao seguinte sistema de equações para a e b:

$$a + b + c = 0 \quad (46)$$

$$\alpha_0(b+c) + j\omega(c-b) = \omega \quad (47)$$

$$a\omega^2 + (c-b)j\omega\alpha_0 = \beta_0\omega \quad (48)$$

Exemplo 6 - continuação

Multiplicando a equação (47) por α_0 e subtraindo a equação (48):

$$-a\omega^2 + \alpha_0^2(b+c) = (\alpha_0 - \beta_0)\omega \tag{49}$$

Em seguida, substituindo $b+c=-a$ da equação (46) na equação (49):

$$-a\omega^2 - \alpha_0^2 a = (\alpha_0 - \beta_0)\omega \rightarrow a = \frac{\omega(\beta_0 - \alpha_0)}{\omega^2 + \alpha_0^2}. \tag{50}$$

Exemplo 6 - continuação

Das equações (47) e (48) com o valor de a encontrado em (50):

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}\{c-b\}=0\\ \mathrm{Im}\{c+b\}=0\end{array}\right\} c=\bar{b}. \tag{51}$$

Com isso, das equações (46) e (51):

$$a+2\,\mathrm{Re}\{b\}=0\rightarrow \mathrm{Re}\{b\}=\frac{\omega(\alpha_0-\beta_0)}{2(\omega^2+\alpha_0^2)}. \tag{52}$$

A parte imaginária pode ser obtida das equações (48) e (51):

$$a\omega^2+[-2j\,\mathrm{Im}\{b\}]\,j\omega\alpha_0=\beta_0\omega\rightarrow \mathrm{Im}\{b\}=\frac{\alpha_0\beta_0+\omega^2}{2(\omega^2+\alpha_0^2)}. \tag{53}$$

Exemplo 6 - continuação

Finalmente, das equações (51), (52) e (53), determinam-se:

$$b = \bar{c} = \frac{\omega(\alpha_0 - \beta_0)}{2(\omega^2 + \alpha_0^2)} + j\frac{\alpha_0\beta_0 + \omega^2}{2(\omega^2 + \alpha_0^2)}. \tag{54}$$

Com isso, a resposta temporal pode ser obtida com auxílio da tabela de transformadas como:

$$\begin{aligned} y(t) &= ae^{-\alpha_0 t} + be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} = ae^{-\alpha_0 t} + 2\,\mathrm{Re}\left\{be^{-j\omega t}\right\} = \\ &= ae^{-\alpha_0 t} + 2\left[\mathrm{Re}\{b\}\cos(\omega t) + \mathrm{Im}\{b\}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] = \\ &= ae^{-\alpha_0 t} + 2|b|\cos\left[\omega t - \mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}\{b\}}{\mathrm{Re}\{b\}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Uso de limites para calcular os coeficientes da expansão em frações parciais

Uma maneira mais simples do que resolver o sistema de equações (46), (47) e (48) é usar o limite como a seguir.

Example 7.

Vamos resolver o mesmo sistema do exemplo 6 por um procedimento menos trabalhoso:
Lembrando que o produto pode ser decomposto como:

$$Y(s) = \frac{s+\beta_0}{s+\alpha_0} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{a}{s+\alpha_0} + \frac{b}{s+j\omega} + \frac{c}{s-j\omega}. \tag{56}$$

Exemplo 7 - continuação

Se multiplicarmos os lados da equação (56) por $s+\alpha_0$, teremos:

$$(s+\alpha_0)\,Y(s) = s+\beta_0\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = a+(s+\alpha_0)\,\frac{b}{s+j\omega}+(s+\alpha_0)\,\frac{c}{s-j\omega}. \tag{57}$$

Agora, tomando o limite quando $s\rightarrow-\alpha_0$:

$$\lim_{s\rightarrow-\alpha_0}(s+\alpha_0)\,Y(s) = \lim_{s\rightarrow-\alpha_0}\left\{s+\beta_0\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = a. \tag{58}$$

Exemplo 7 - continuação

Aplicando procedimento similar:

$$\lim_{s\to -j\omega}(s+j\omega)\,Y(s) = \lim_{s\to -j\omega}\left\{\frac{s+\beta_0}{s+\alpha_0}\cdot\frac{\omega}{s-j\omega}\right\} = b, \tag{59}$$

e

$$\lim_{s\to j\omega}(s-j\omega)\,Y(s) = \lim_{s\to j\omega}\left\{\frac{s+\beta_0}{s+\alpha_0}\cdot\frac{\omega}{s+j\omega}\right\} = c. \tag{60}$$

Exemplo 7 - continuação

Das equações (58), (59) e (60):

$$a = \frac{(\beta_0 - \alpha_0)\omega}{\alpha_0^2 + \omega^2}, \tag{61}$$

$$b = \frac{\beta_0 - j\omega}{\alpha_0 - j\omega} \cdot \frac{1}{-2j} = \frac{\omega(\alpha_0 - \beta_0)}{2(\alpha_0^2 + \omega^2)} + j\frac{\alpha_0\beta_0 + \omega^2}{2(\alpha_0^2 + \omega^2)}, \tag{62}$$

$$c = \frac{\beta_0 + j\omega}{\alpha_0 + j\omega} \cdot \frac{1}{2j} = \frac{\omega(\alpha_0 - \beta_0)}{2(\alpha_0^2 + \omega^2)} - j\frac{\alpha_0\beta_0 + \omega^2}{2(\alpha_0^2 + \omega^2)}, \tag{63}$$

que é o mesmo resultado do exemplo 6.

Expansão em frações parciais com polos repetidos

- Procedimento do exemplo 7 requer que não haja raízes repetidas no polinômio do denominador;
- Admitamos que haja uma raiz com multiplicidade q:

$$Y(s) = \frac{\prod_{k=1}^{m}(s+z_k)}{(s+p_q)^q \prod_{i=q+1}^{n}(s+p_i)}; \tag{64}$$

- Expansão em frações parciais:

$$\begin{aligned} Y(s) = {} & \frac{a_1}{s+p_q} + \frac{a_2}{(s+p_q)^2} + \cdots + \frac{a_q}{(s+p_q)^q} + \\ & + \frac{a_{q+1}}{s+p_{q+1}} + \frac{a_{q+2}}{s+p_{q+2}} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}. \end{aligned} \tag{65}$$

- Para as raízes simples, os coeficiente podem ser encontrados como no exemplo 7:

$$a_i = \lim_{s \to -p_i} (s + p_i) Y(s), \; q + 1 \leq i \leq n \tag{66}$$

- Para as raízes repetidas, se multiplicarmos por $(s + p_q)^r$ com $r < q$, então $\lim_{s \to -p_q} (s + p_q)^r Y(s)$ não existe. Dessa forma, podemos apenas calcular a_q como:

$$a_q = \lim_{s \to -p_q} (s + p_q)^q Y(s) \tag{67}$$

Escrevendo:

$$(s+p_q)^q Y(s) = \frac{a_1(s+p_q)^q}{s+p_q} + \frac{a_2(s+p_q)^q}{(s+p_q)^2} + \cdots + \frac{a_q(s+p_q)^q}{(s+p_q)^q} + \tag{68}$$

$$+ \frac{a_{q+1}(s+p_q)^q}{s+p_{q+1}} + \frac{a_{q+2}(s+p_q)^q}{s+p_{q+2}} + \cdots + \frac{a_n(s+p_q)^q}{s+p_n} =$$

$$= a_1(s+p_q)^{q-1} + a_2(s+p_q)^{q-2} + \cdots + a_{q-1}(s+p_q) + a_q +$$

$$+ \frac{a_{q+1}(s+p_q)^q}{s+p_{q+1}} + \frac{a_{q+2}(s+p_q)^q}{s+p_{q+2}} + \cdots + \frac{a_n(s+p_q)^q}{s+p_n} =$$

Derivando a expressão da equação (68) com respeito a s:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left((s+p_q)^q Y(s)\right) = a_1(q-1)(s+p_q)^{q-2} + \\ + a_2(q-2)(s+p_q)^{q-3} + \cdots + a_{q-1} + \\ + \frac{a_{q+1}\left(q(s+p_q)^{q-1}(s+p_{q+1}) - (s+p_q)^q\right)}{(s+p_{q+1})^2} + \\ + \frac{a_{q+2}\left(q(s+p_q)^{q-1}(s+p_{q+2}) - (s+p_q)^q\right)}{(s+p_{q+2})^2} + \\ + \cdots + \frac{a_n\left(q(s+p_q)^{q-1}(s+p_n) - (s+p_q)^q\right)}{(s+p_n)^2} =\end{aligned} \tag{69}$$

Donde

$$a_{q-1} = \lim_{s \to -p_q} \frac{d}{ds}\left((s+p_q)^q Y(s)\right) \tag{70}$$

Repetindo este procedimento r vezes:

$$a_{q-r} = \frac{1}{r!} \lim_{s \to -p_q} \frac{d^r}{ds^r}\left((s+p_q)^q Y(s)\right),\ 1 \leq r \leq q-1 \tag{71}$$

Example 8.

Seja:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^3} = \frac{a}{(s+2)^3} + \frac{b}{(s+2)^2} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{s} \tag{72}$$

Têm-se:

$$(s+2)^3 Y(s) = \frac{s+1}{s} \tag{73}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+2)^3 Y(s)\right] = \frac{-1}{s^2} \tag{74}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3 Y(s)\right] = \frac{2}{s^3} \tag{75}$$

Exemplo 8 - continuação

Donde:

$$a = \lim_{s \to -2} (s+2)^3 Y(s) = \lim_{s \to -2} \frac{s+1}{s} = \frac{1}{2}, \tag{76}$$

$$b = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds}[(s+2)^3 Y(s)] = \lim_{s \to -2} \frac{-1}{s^2} = -\frac{1}{4}, \tag{77}$$

$$c = \frac{1}{2} \lim_{s \to -2} \frac{d^2}{ds^2}[(s+2)^3 Y(s)] = \frac{1}{2} \lim_{s \to -2} \frac{2}{s^3} = -\frac{1}{8}, \tag{78}$$

Por sua vez,

$$d = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s+1}{(s+2)^3} = \frac{1}{8}. \tag{79}$$