



Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Divisão de Engenharia Eletrônica

Departamento de Sistemas e Controle

São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aulas 5 e 6 - Estabilidade de sistemas de controle

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

15 de março de 2018

Motivação

- Uma questão primordial é determinar se o sistema é estável, isto é, se a saída converge para um valor real;
- Caso isso não aconteça, a saída do sistema pode oscilar indefinidamente ou mesmo divergir:
 - Não será possível atingir uma referência para a saída;
 - Oscilações na saída ou divergência podem levar a danos ao equipamento ou mesmo à saúde humana.



Sinais limitados e estabilidade

- A saída do sistema, em geral, dependerá da entrada aplicada \rightarrow definição de estabilidade deve levar a entrada em conta;
- Sistema pode ter sua saída levada a um comportamento instável caso a própria entrada diverja;
- Estabilidade em termos de sinais limitados:

Definição 1.

Um sinal $x(t)$ é limitado quando:

$$\exists M \in \mathbb{R} : |x(t)| \leq M, t \geq 0. \quad (1)$$

Definição 2 (Sistema BIBO estável).

Um sistema é dito ser BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) estável se a saída $y(t)$ é um sinal limitado para qualquer sinal de entrada limitado $u(t)$.



A saída de um sistema para uma entrada $u(t)$ qualquer é dada pela convolução de sua resposta ao impulso $h(t)$ com a entrada:

$$y[u(t)] = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Assumindo que a entrada $u(t)$ seja um sinal limitado, tem-se que:

$$y[u(t)] \leq M \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Donde $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau$ limitada $\Rightarrow y(t)$ limitada. Resposta ao impulso para sistemas causais será nula para $\tau < 0$:

$$\int_0^{\infty} h(\tau)d\tau \text{ limitada} \Rightarrow y(t) \text{ limitada} \Rightarrow \text{Sistema BIBO estável.} \quad (4)$$



- A transformada de Laplace da resposta ao impulso é numericamente igual à função de transferência do sistema;
- Sistemas de interesse são restritos àqueles cujos coeficientes dos polinômios no numerador $p(s)$ e no denominador $q(s)$ de $G(s)$ são reais, podendo ser descritos pelo modelo:

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{\prod_{i=1}^{n_1} (s - p_i^r) \prod_{i=1}^{n_2} [s^2 - 2 \operatorname{Re} \{p_i^c\} s + |p_i^c|^2]}, \quad (5)$$

em que p_i^r são os polos reais e p_i^c são os polos complexos (que aparecem em pares complexos conjugados).

Como $\operatorname{grau}(p) \leq \operatorname{grau}(q)$ (causalidade) e usando a tabela de transformadas de Laplace, teremos que:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i e^{p_i^r t} + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i e^{\operatorname{Re}\{p_i^c\} t} \cos(\operatorname{Im}\{p_i^c\} t + \phi_i). \quad (6)$$

$\int_0^\infty h(\tau) d\tau$ será limitada se:

$$p_i^r < 0 \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}\{p_i^c\} < 0 \quad (8)$$



Um critério sobre os polos do sistema

Isto é, **os polos do sistema devem ter parte real negativa para que o sistema seja BIBO estável.**

Observação 1 (Necessidade de parte real dos polos negativa).

Para constatar que a parte real dos polos deve ser estritamente menor do que zero, basta notar que a integral diverge:

- *para $p_i^r > 0$, a integral conterà $\int_0^\infty e^{p_i^r t} d\tau$, que diverge.*
- *para $p_i^r = 0$, a integral conterà $\int_0^\infty 1 d\tau$, que diverge.*
- *para $\text{Re}\{p_i^c\} > 0$, a integral conterà $\int_0^\infty e^{\text{Re}\{p_i^c\}t} \cos(\text{Im}\{p_i^c\}t + \phi_i) d\tau$, que diverge.*
- *(continua no próximo slide)*



Observação 1 - continuação

- para $\text{Re}\{p_i^c\} = 0$, pois resulta em resposta a impulso da forma $h(t) = \cos(\omega t + \phi)$. Se a entrada for $u(t) = \cos(\omega t)$, a resposta $y(t)$ é:

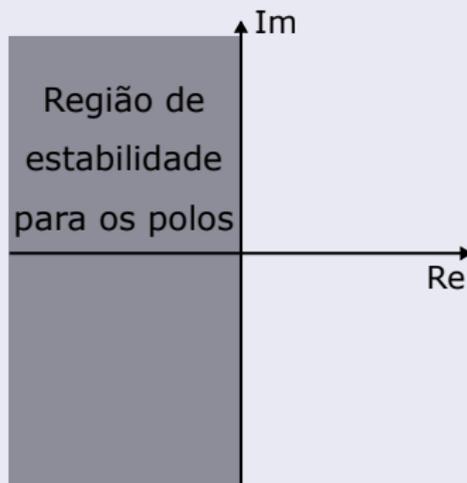
$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) \cos(\omega(t - \tau) + \phi) d\tau = & (9) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) [\cos(\omega t + \phi) \cos(\omega\tau) + \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}(\omega\tau)] d\tau = \\
 &= \cos(\omega t + \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\omega\tau) d\tau + \text{sen}(\omega t + \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\
 &= \cos(\omega t + \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos(2\omega\tau)}{2} d\tau + \text{sen}(\omega t + \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\omega\tau)}{2} d\tau,
 \end{aligned}$$

que diverge.



Observação 2 (Polos no Semiplano Esquerdo).

Visto que tanto os polos reais quanto os polos complexos devem ter parte real negativa, costuma-se dizer que o requisito para estabilidade é que os polos estejam no Semiplano Esquerdo (SPE) do plano complexo.



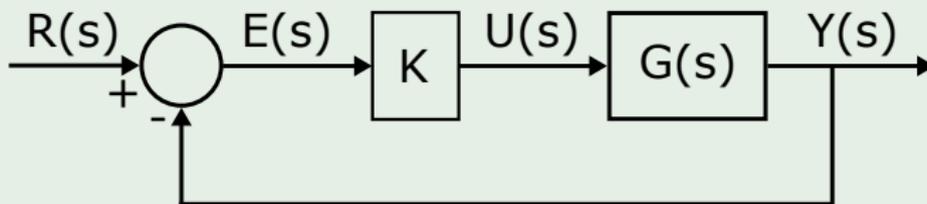
Avaliação de estabilidade: critério de Routh-Hurwitz

- Estabilidade pode ser verificada apenas considerando a função de transferência do sistema, simplesmente avaliando as raízes do polinômio do seu denominador;
- Denominador da função de transferência é conhecido → basta encontrar as raízes do polinômio:
 - Algebricamente ou numericamente (tipicamente para polinômios de grau maior do que 2).
- Pergunta: e se o polinômio tiver ao menos algum de seus coeficientes dependentes de um parâmetro desconhecido?
 - Avaliar a estabilidade como função deste parâmetro.



Example 3.

- Sistema de controle típico: realimentação negativa unitária com ganho K em cascata:
 - y é subtraído do sinal de **referência** r , formando o sinal de **erro** e ;
 - O sinal de controle u é proporcional ao sinal de erro, com uma constante $K \in \mathbb{R}$ de proporcionalidade (chamada **ganho proporcional**).



Admita que a função de transferência da planta é

$$G(s) = \frac{5}{s(s+2)}. \quad (10)$$



Exemplo 3 - continuação

Determinar K para que a função de transferência $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ seja estável:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{5K}{s^2 + 2s + 5K}, \quad (11)$$

$$p^c = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5K}, \quad (12)$$

donde conclui-se que basta que $K > 0$ para que os polos estejam no SPE e o sistema em malha fechada seja estável.

No exemplo 3, os polos foram determinados explicitamente como função do parâmetro K . Para polinômios de grau maior no denominador isso nem sempre é possível. Para lidar com essa situação, pode-se apelar para o **critério de Routh-Hurwitz**.



Critério 1 (Critério de Routh-Hurwitz).

Seja o polinômio

$$p(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i, \quad (13)$$

constrói-se a tabela:

s^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	...
s^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	...
s^{n-2}	β_{n-2}	β_{n-4}	β_{n-6}	...
s^{n-3}	γ_{n-3}	γ_{n-5}	γ_{n-7}	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^2	η_2	η_0		
s^1	μ_1			
s^0	η_0			

em que

$$\beta_{n-2i} = \frac{\alpha_{n-2i}\alpha_{n-1} - \alpha_n\alpha_{n-2i-1}}{\alpha_{n-1}}, \quad i \geq 1, \quad (14)$$

$$\gamma_{n-2i-1} = \frac{\beta_{n-2}\alpha_{n-2i-1} - \alpha_{n-1}\beta_{n-2i-2}}{\beta_{n-2}}, \quad i \geq 1,$$



Critério de Routh-Hurwitz - continuação

Então, o número de raízes de $p(s)$ com parte real positiva é igual ao número de trocas de sinal nos elementos da primeira coluna da Tabela 1 (em azul): $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \beta_{n-2}, \gamma_{n-3}, \dots, \eta_2, \mu_1$ e η_0 .

Observação 3.

O critério de Routh-Hurwitz permite determinar quantas raízes de $p(s)$ têm parte real positiva sem calcular as raízes. Para que o sistema seja estável, é necessário que nenhum polo esteja no Semiplano Direito (SPD) do plano complexo, então não deve haver trocas de sinal nos elementos da primeira coluna da tabela construída para o polinômio do denominador da função de transferência em estudo.



Example 4.

Seja uma malha de controle com realimentação negativa e ganho proporcional em que

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 - 2s + 1)(s + 3)} = \frac{1}{s^3 + s^2 - 5s + 3}. \quad (15)$$

É necessário determinar os valores do ganho K de forma que a função de transferência $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ seja estável. Sabe-se que:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s^3 + s^2 - 5s + 3 + K}. \quad (16)$$

Construindo a tabela de Routh, começa-se pelas linhas s^3 e s^2 :

s^3	1	-5
s^2	1	$3 + K$



Exemplo 4 - continuação

Depois pode-se calcular $\mu_1 = \frac{(-5)1 - 1(3+K)}{1} = -K - 8$ e determinar $\eta_0 = 3 + K$, completando a tabela:

s^3	1	-5
s^2	1	$3 + K$
s^1	$-K - 8$	
s^0	$3 + K$	

Para que a primeira coluna da tabela de Routh não tenha mudanças de sinal:

$$-K - 8 > 0 \Rightarrow K < -8, \quad (17)$$

$$K + 3 > 0 \Rightarrow K > -3. \quad (18)$$

Estes intervalos possuem interseção vazia, isto é, **não existe um ganho K que estabilize o sistema em malha fechada**. Se $K > 0$, teremos duas trocas de sinal na primeira coluna da tabela de Routh, o que indica que há dois polos no SPD.



Casos anômalos

Há dois tipos de casos anômalos que podem ser encontrados na construção da tabela de Routh:

- 1 Um elemento da primeira coluna é 0, porém há outros elementos diferentes de 0 na linha correspondente;
- 2 Todos os elementos de uma certa linha são 0.

Cada um desses dois casos tem um significado e requer um diferente tratamento especial, discutido a seguir.



Apenas um elemento nulo na primeira coluna de uma linha

Significa que a soma das raízes é zero. Mais do que isso, nesse caso está excluída a possibilidade de se terem apenas raízes imaginárias, então pelo menos uma raiz deve estar no SPD. Do ponto de vista de estabilidade, conclui-se que não poderá ser estável, porque **pelo menos uma raiz** estará no SPD.

- Pode-se determinar o número de raízes no SPD seguindo o procedimento:
 - 1 Troca-se o elemento nulo por ε e segue-se construindo a tabela de Routh até o fim;
 - 2 Toma-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (se os demais elementos anteriores desta coluna forem positivos). O número de trocas de sinal será igual à quantidade de polos no SPD.



Example 5.

A tabela de Routh para o polinômio $p(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 4s + 1$ é:

s^4	1	2	1
s^3	2	4	
s^2	0	1	

Há um elemento 0 na primeira coluna, mas o outro elemento desta linha é 1 \rightarrow caso anômalo 1: trocar o 0 por ϵ e prosseguir:

s^4	1	2	1
s^3	2	4	
s^2	ϵ	1	
s^1	$\frac{4\epsilon-2}{\epsilon}$		
s^0	1		

Tomando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, há duas trocas de sinal na primeira coluna da tabela de Routh (linha s^1 fica negativa). Isso indica que o polinômio tem duas raízes no SPD. De fato, as raízes determinadas numericamente são $-1,9070$, $-0,2797$ e $0,0933 \pm j1,3660$.



Linha de zeros na tabela de Routh

Uma linha de zeros na tabela de Routh significa que o polinômio tem raízes simétricas com respeito à origem do plano complexo, ou seja:

- 1 O sistema tem polos com parte real positiva e polos com parte real negativa de igual magnitude, resultando na instabilidade do sistema **ou**
- 2 O sistema tem polos imaginários.

Para realizar a análise:

- 1 Obter um polinômio $q(s)$ construído através dos coeficientes na linha imediatamente acima da linha de zeros, levando em conta que o monômio de maior potência em s tem potência s^i , onde s^i é o índice da linha na tabela de Routh;
- 2 Obter um polinômio $q'(s) = \frac{dq(s)}{ds}$;
- 3 Utilizar o critério de Routh para verificar se este polinômio terá trocas de sinal na primeira coluna da tabela de Routh. Caso tenha, há raízes no semiplano direito. Caso contrário, há raízes sobre o eixo imaginário.



Example 6.

Tome o polinômio $p(s) = s^7 + 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 12s + 16$, construindo a tabela de Routh:

s^7	1	3	4	12
s^6	2	4	8	16
s^5	1	0	4	
s^4	4	0	16	
s^3	0	0		

- Há uma linha de zeros. De acordo com o procedimento proposto, toma-se o polinômio auxiliar obtido a partir da linha de s^4 :
 $q(s) = 4s^4 + 16$ e sua derivada $q'(s) = 16s^3$.
- As raízes de $q(s)$ são trivialmente encontradas como $\pm 1 \pm j$, isto é, há raízes com parte real positiva, ou seja, o sistema não é sequer marginalmente estável, uma vez que **raízes de $q(s)$ serão também raízes de $p(s)$** .



Exemplo 6 - continuação

Substituindo a linha s^3 pelos coeficientes de $q'(s)$:

s^7	1	3	4	12
s^6	2	4	8	16
s^5	1	0	4	
s^4	4	0	16	
s^3	16	0		
s^2	ϵ	16		
s^1	$\frac{-256}{\epsilon}$			
s^0	16			

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$ há duas trocas de sinal na tabela de Routh, então há duas raízes no SPD $\rightarrow p(s)$ tem 5 raízes no SPE e 2 raízes no SPD. Fatorando $p(s)$ por $q(s)$: $\frac{p(s)}{q(s)} = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$, cujas raízes são $-1,6506$ e $-0,1747 \pm j1,5469$. Lembrando que as raízes de $q(s)$ são $\pm 1 \pm j$, teremos 5 raízes no SPE: $-1,6506$, $-0,1747 \pm j1,5469$ e $-1 \pm j$ e 2 no SPD: $1 \pm j$.



Estabilidade relativa

- É possível saber quão distante do eixo imaginário as raízes estão a fim de determinar quão perto de se tornar instável o sistema pode estar ou mesmo qual é a taxa de decaimento da resposta do sistema;
- Pode-se aplicar o critério de Routh-Hurwitz a um polinômio modificado fazendo uma mudança de variáveis que translada o eixo imaginário de uma quantidade σ :

$$p_{\sigma}(s) = p(s + \sigma); \quad (19)$$

- Aplicando o critério de Routh-Hurwitz ao polinômio $p_{\sigma}(s)$, determinaremos quantas raízes deste polinômio estão no SPE;
- Raízes de $p_{\sigma}(s)$ à esquerda do eixo imaginário correspondem a raízes de $p(s)$ à esquerda da reta $s = \sigma$ no plano complexo.
- Podemos escolher σ iterativamente e determinar a distância dos polos do sistema ao eixo imaginário.



Example 7.

Admita que o polinômio no denominador de uma função de transferência seja $p(s) = s^3 + 12s^2 + 61s + 82$. Deseja-se determinar a estabilidade relativa. Inicialmente, define-se:

$$p_{-1}(s) = p(s - 1) = s^3 + 9s^2 + 40s + 32 \quad (20)$$

Construindo a tabela de Routh:

s^3	1	40
s^2	9	32
s^1	$40 - 32/9$	
s^0	32	

Não há trocas de sinal na primeira coluna da tabela de Routh, o que permite concluir que as raízes de $p(s)$ têm todas parte real menor do que -1 .



Exemplo 6 - continuação

Escolhendo $\sigma = -2$, define-se:

$$p_{-2}(s) = p(s - 2) = s^3 + 6s^2 + 25s \quad (21)$$

As raízes de $p_{-2}(s)$ são 0 e $-3 \pm 4j$. Donde conclui-se que as raízes de $p(s)$ são -2 e $-5 \pm 4j$.



O princípio do argumento

O **princípio do argumento** (Teorema de Cauchy) relaciona o gráfico de uma função analítica $G(s)$, quando ela é avaliada ao longo de um contorno fechado Γ , com o número de raízes (zeros ou polos) de $G(s)$ no interior do contorno. **É importante que o contorno Γ não passe por nenhuma raiz.**

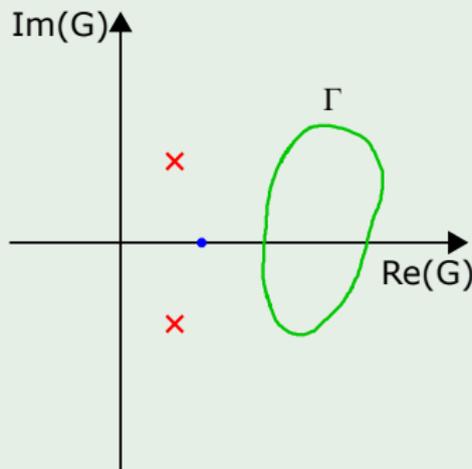


Example 8.

Seja

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad (22)$$

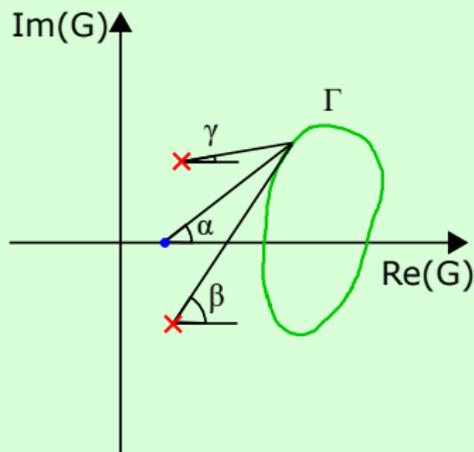
a qual possui dois polos e um zero. Na figura abaixo marcamos os polos de $G(s)$ como \times e os zeros como \circ no plano. Note que, neste caso, o contorno não envolve nenhuma raiz.



Exemplo 8 - continuação

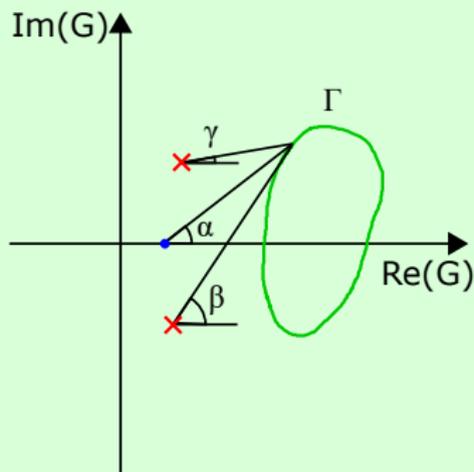
$$\begin{aligned}\angle G(s) &= \angle \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \angle K + \angle(s - z_1) - \angle(s - p_1) - \angle(s - p_2) \\ &= \angle K + \alpha - \beta - \gamma.\end{aligned}\quad (23)$$

- $K > 0 \Rightarrow \angle K = 0$;
- $K < 0 \Rightarrow \angle K = -180^\circ$.



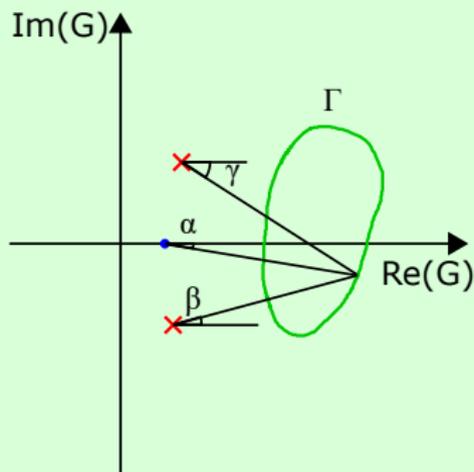
Exemplo 8 - continuação

A fase de $G(s)$ varia conforme percorremos Γ , mas como Γ é fechado, ela volta ao valor inicial sem nunca variar mais de 360° .



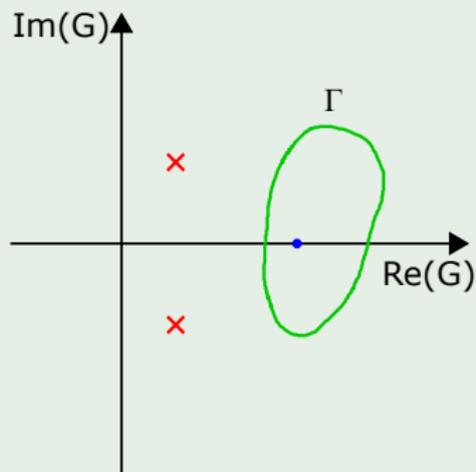
Exemplo 8 - continuação

A fase de $G(s)$ varia conforme percorremos Γ , mas como Γ é fechado, ela volta ao valor inicial sem nunca variar mais de 360° .



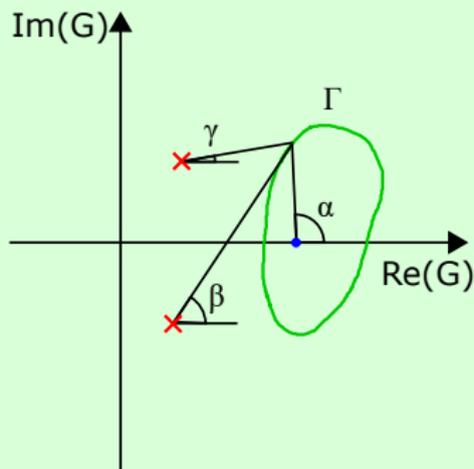
Example 9.

Suponha que z_1 esteja dentro do contorno Γ :



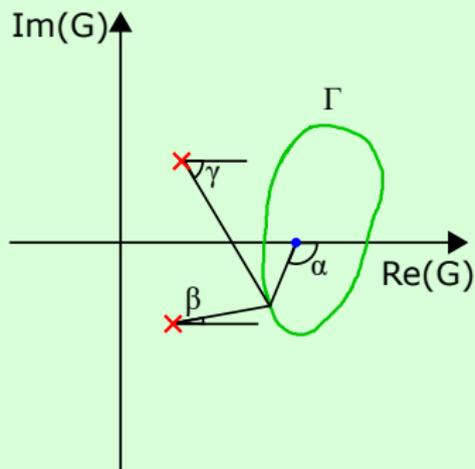
Exemplo 9 - continuação

- Fases β e γ associadas a p_1 e p_2 continuam voltando aos seus valores iniciais sem variar mais do que 360° .
- Fase α associada a z_1 volta ao mesmo valor que tinha, mas terá percorrido 360° , isto é, uma volta completa.



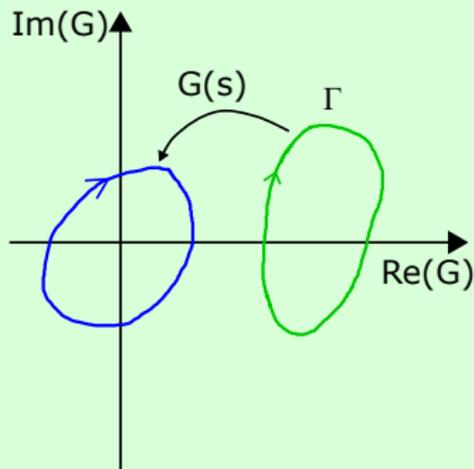
Exemplo 9 - continuação

- Fases β e γ associadas a p_1 e p_2 continuam voltando aos seus valores iniciais sem variar mais do que 360° .
- Fase α associada a z_1 volta ao mesmo valor que tinha, mas terá percorrido 360° , isto é, uma volta completa.



Exemplo 9 - continuação

- Fase de z_1 entra com sinal positivo por estar no numerador \Rightarrow gráfico de $G(s)$ dará uma volta completa em torno da origem, **no mesmo sentido em que se percorrer Γ** .



Observação 4.

Para os polos, a contribuição na fase é negativa, por estarem no denominador. Assim, ao percorrer o contorno Γ , cada polo no interior de Γ será responsável por -360° de fase. Isto significa que, se houver apenas um polo no interior de Γ e nenhum zero, a curva de $G(s)$ avaliada em Γ dará uma volta no sentido oposto em que se percorrer Γ .



Theorem 10 (Princípio do argumento).

Se tivermos múltiplos zeros e polos no interior de Γ , o saldo de números de voltas do mapeamento de $G(s)$ de Γ será o número de zeros menos o número de polos:

$$N = Z - P \quad (24)$$

em que N representa o número de voltas de $G(s)$ em torno da origem no mesmo sentido em que se percorrer Γ , Z é o número de zeros e P o número de polos, ambos no interior de Γ .



Critério de Nyquist

Relembremos que a função de transferência em malha fechada com um ganho K em cascata com $G(s)$ é dada por:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}. \quad (25)$$

Para determinar se o sistema em malha fechada é instável, basta verificar se existe alguma raiz do denominador de $T(s)$ no semiplano direito. Assim, necessita-se definir um contorno que englobe todo o semiplano direito para verificar se há raízes de $1 + KG(s)$ usando o princípio do argumento.



Contorno de Nyquist

Composto de:

- Reta iniciando em $-j\infty$, passando pela origem e indo até $+j\infty$
- Semicircunferência de raio infinito, de maneira a conter todo o semiplano direito no interior do contorno.

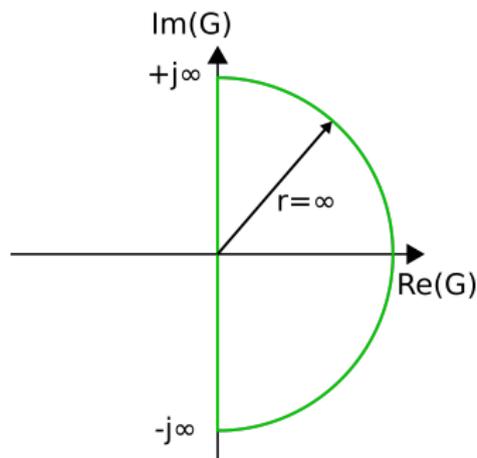


Diagrama de Nyquist

O mapeamento do contorno de Nyquist por $G(s)$ é o chamado **diagrama de Nyquist** de $G(s)$.

Observação 5.

- *Polos do sistema em malha fechada são os zeros de $1 + KG(s)$;*
- *Polos de malha aberta são polos de $G(s)$, que também são polos de $1 + KG(s)$.*
- *Ao determinarmos quantos Z zeros de $1 + KG(s)$ estão no SPD, estamos determinando quantos polos de malha fechada estão no SPD.*



Observação 6.

- *Mapeamento $1 + KG(s)$ circundará a origem o mesmo número de vezes N que o mapeamento $G(s)$ circundar o ponto $-\frac{1}{K}$:*

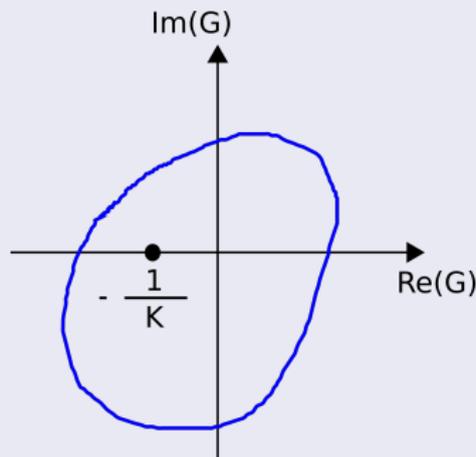
$$Z = N + P, \quad (26)$$

em que

- *Z : polos de malha fechada no SPD;*
- *P : polos de malha aberta no SPD;*
- *N : número de voltas do diagrama de Nyquist em torno do ponto $-\frac{1}{K}$ ($N > 0$ se a volta for no mesmo sentido em que se percorreu o contorno de Nyquist e $N < 0$, caso contrário).*



Observação 6 - continuação



- Encontrar K que torna o sistema estável em MF $\Rightarrow Z = 0$:

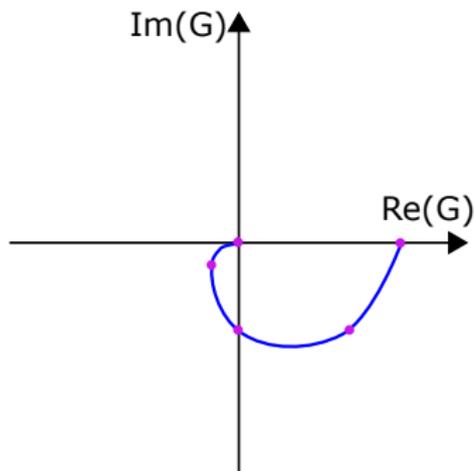
$$N = -P, \quad (27)$$

isto é, o diagrama de Nyquist terá que dar tantas voltas no sentido oposto ao do contorno quanto o número de polos de malha aberta de $G(s)$ estiverem no SPD.



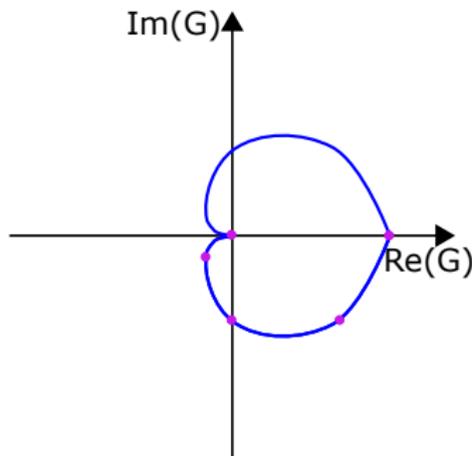
Traçado do diagrama de Nyquist

- Porção do contorno sobre o eixo imaginário: avaliar módulo e fase de $G(j\omega)$ para $0 < \omega < +\infty$;
- $G(s)$ é uma função racional (com coeficientes reais):
 $G(s) = \bar{G}(\bar{s})$, isto é, $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$;
- Parte com $-\infty < \omega < 0$ é simétrica à parte do diagrama de Nyquist com $0 < \omega < +\infty$, com relação ao eixo real.



Traçado do diagrama de Nyquist

- Porção do contorno sobre o eixo imaginário: avaliar módulo e fase de $G(j\omega)$ para $0 < \omega < +\infty$;
- $G(s)$ é uma função racional (com coeficientes reais):
 $G(s) = \bar{G}(\bar{s})$, isto é, $G(-j\omega) = \bar{G}(j\omega)$;
- Parte com $-\infty < \omega < 0$ é simétrica à parte do diagrama de Nyquist com $0 < \omega < +\infty$, com relação ao eixo real.



- Semicircunferência de raio infinito: parametrizar como $s_{sc} = re^{j\phi}$ com $r \rightarrow \infty$ e ϕ variando de 90° a $-90^\circ \Rightarrow$ percorrer o contorno no sentido horário (escolha arbitrária de sentido).
- Duas situações distintas quanto ao módulo de $G(s_{sc})$:
 - $G(s)$ estritamente própria: grau do denominador g_{den} é maior do que o do numerador $g_{num} \Rightarrow |G(s_{sc})| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$. A fase com que entra na origem é dada por $90^\circ(g_{num} - g_{den})$.
 - $G(s)$ apenas própria: $g_{num} = g_{den} \Rightarrow |G(s_{sc})| \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$ constante.



Example 11.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, p_1 < 0, \quad (28)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:



Example 11.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, \quad p_1 < 0, \quad (28)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.



Example 11.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, \quad p_1 < 0, \quad (28)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de 0 a -90° , devido ao polo simples.



Example 11.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, \quad p_1 < 0, \quad (28)$$

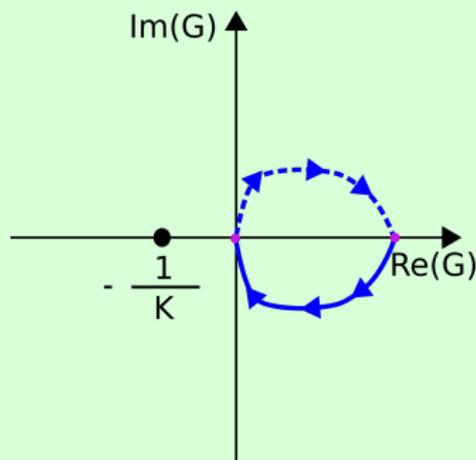
a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de 0 a -90° , devido ao polo simples.
- O módulo será $-\frac{1}{p_1}$ em $\omega = 0$ e a fase será 0 também, pois $-p_1 > 0$.



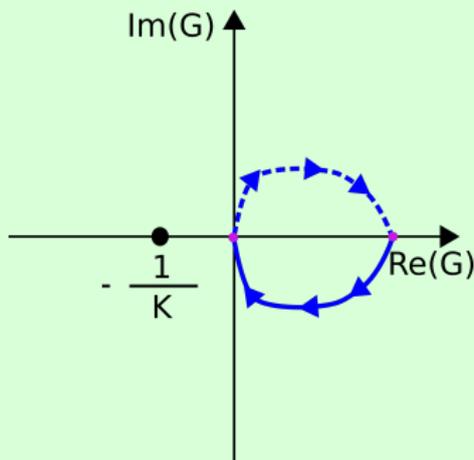
Exemplo 11 - continuação

- Não há nenhum valor de $K > 0$ que faça a curva circundar o ponto $-1/K$ e também não há polos de malha aberta no SPD: $N = 0$ e $P = 0$;



Exemplo 11 - continuação

- Não há nenhum valor de $K > 0$ que faça a curva circundar o ponto $-1/K$ e também não há polos de malha aberta no SPD: $N = 0$ e $P = 0$;
- $Z = N + P = 0 \Rightarrow$ não existe valor de $K > 0$ que instabilize o sistema em MF.



Example 12.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, p_1 > 0, \quad (29)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:



Example 12.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, p_1 > 0, \quad (29)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.



Example 12.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, p_1 > 0, \quad (29)$$

a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -180° a -90° , devido ao polo simples no SPD.



Example 12.

Seja

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1}, p_1 > 0, \quad (29)$$

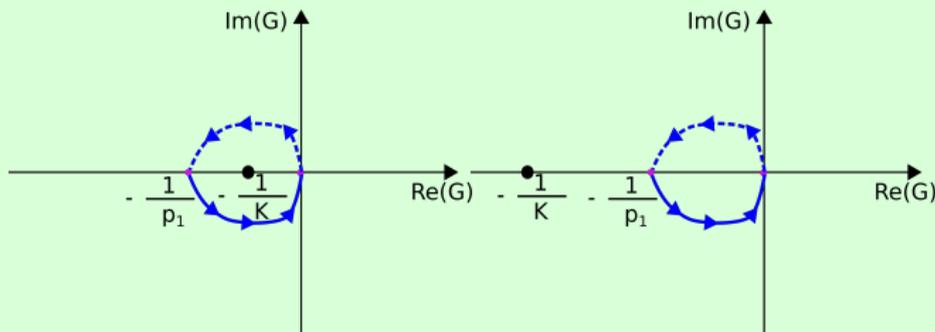
a fim de esboçar o diagrama de Nyquist observemos que:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -180° a -90° , devido ao polo simples no SPD.
- O módulo será $-\frac{1}{p_1}$ em $\omega = 0$ e a fase será -180° também, pois $-p_1 < 0$.



Exemplo 12 - continuação

- 1 $K > p_1 \Rightarrow -1/K > -1/p_1 \Rightarrow N = -1 (P = 1) \Rightarrow Z = N + P = 0$
 \Rightarrow estável MF. O diagrama de Nyquist pode ser visto na figura à esquerda.
- 2 $K < p_1 \Rightarrow -1/K < -1/p_1 \Rightarrow N = 0 (P = 1) \Rightarrow Z = N + P = 1$
 \Rightarrow instável em malha fechada (tem 1 polo de malha fechada no SPD). O diagrama de Nyquist pode ser visto na figura à direita.



Example 13.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-p_1)(s-p_2)}, p_1 \cdot p_2 > 0, \quad (30)$$

1 $p_1, p_2 < 0 \Rightarrow P = 0$:



Example 13.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-p_1)(s-p_2)}, p_1 \cdot p_2 > 0, \quad (30)$$

1 $p_1, p_2 < 0 \Rightarrow P = 0$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.



Example 13.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-p_1)(s-p_2)}, p_1 \cdot p_2 > 0, \quad (30)$$

1 $p_1, p_2 < 0 \Rightarrow P = 0$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -90° (devido ao polo em $s = 0$) a -270° .



Example 13.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-p_1)(s-p_2)}, p_1 \cdot p_2 > 0, \quad (30)$$

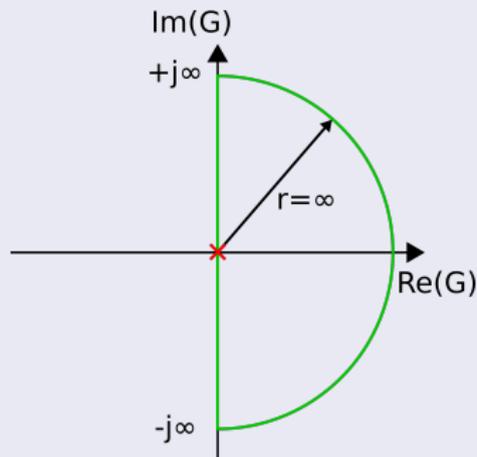
1 $p_1, p_2 < 0 \Rightarrow P = 0$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -90° (devido ao polo em $s = 0$) a -270° .
- O módulo será ∞ em $\omega = 0$ por causa do polo em $s = 0$.



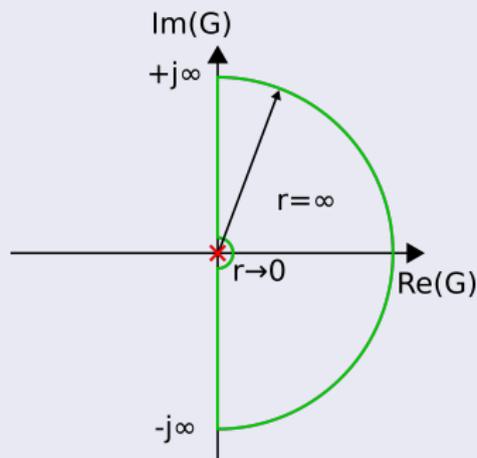
Observação 7.

No que diz respeito à fase, é necessário considerar o efeito de se ter um polo em $s = 0$. Uma hipótese do princípio do argumento era de que o contorno não pode passar por raízes de $G(s)$.



Observação 7 - continuação

Isto pode ser evitado incluindo um arco de semicircunferência em torno do polo em $s = 0$ com raio infinitesimal, de modo a não passar pelo polo, mas ainda conter todo o restante do SPD no interior do contorno.



Exemplo 13 - continuação

- $s = re^{j\phi}$, com $r \rightarrow 0$ e ϕ variando de -90° a $+90^\circ$ conforme circundamos o polo na origem;



Exemplo 13 - continuação

- $s = re^{j\phi}$, com $r \rightarrow 0$ e ϕ variando de -90° a $+90^\circ$ conforme circundamos o polo na origem;
- Como $G(s)$ envolve $\frac{1}{s}$, sua fase varia de $+90^\circ$ a -90° com módulo infinito;



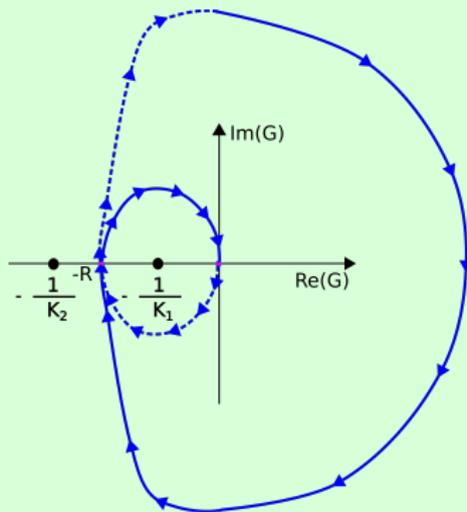
Exemplo 13 - continuação

- $s = re^{j\phi}$, com $r \rightarrow 0$ e ϕ variando de -90° a $+90^\circ$ conforme circundamos o polo na origem;
- Como $G(s)$ envolve $\frac{1}{s}$, sua fase varia de $+90^\circ$ a -90° com módulo infinito;
- Semicircunferência de raio infinito entre -90° a $+90^\circ$.



Exemplo 13 - continuação

- $s = re^{j\phi}$, com $r \rightarrow 0$ e ϕ variando de -90° a $+90^\circ$ conforme circundamos o polo na origem;
- Como $G(s)$ envolve $\frac{1}{s}$, sua fase varia de $+90^\circ$ a -90° com módulo infinito;
- Semicircunferência de raio infinito entre -90° a $+90^\circ$.



Exemplo 13 - continuação

- $p_1, p_2 < 0 \Rightarrow P = 0$;
- Desejado $Z = 0 \Rightarrow N = 0$;
- Satisfeito para o ganho $-1/K_2 < -R$, em que $-R$ é onde a curva cruza o eixo real negativo;
- $K_2 < 1/R$ estabiliza o sistema em MF;
- $K_2 < 0$ também instabiliza o sistema, pois o ponto $-1/K_2$ ficará no eixo real positivo $\Rightarrow N = 1 \Rightarrow Z = P + N = 1$;
- Faixa de valores de K para que o sistema seja estável em MF:
 $0 < K_2 < 1/R$.



Exemplo 13 - continuação

2 $p_1, p_2 > 0 \Rightarrow P = 2$:



Exemplo 13 - continuação

2 $p_1, p_2 > 0 \Rightarrow P = 2$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.



Exemplo 13 - continuação

2 $p_1, p_2 > 0 \Rightarrow P = 2$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -450° (devido ao polo em $s = 0$ e aos dois polos no SPD) a -270° .



Exemplo 13 - continuação

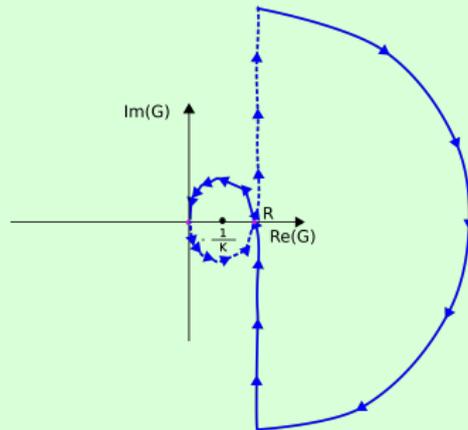
2 $p_1, p_2 > 0 \Rightarrow P = 2$:

- O módulo será 0 no arco da semicircunferência, pois é estritamente próprio.
- No eixo imaginário, a fase variará de -450° (devido ao polo em $s = 0$ e aos dois polos no SPD) a -270° .
- O módulo será ∞ em $\omega = 0$ por causa do polo em $s = 0$.



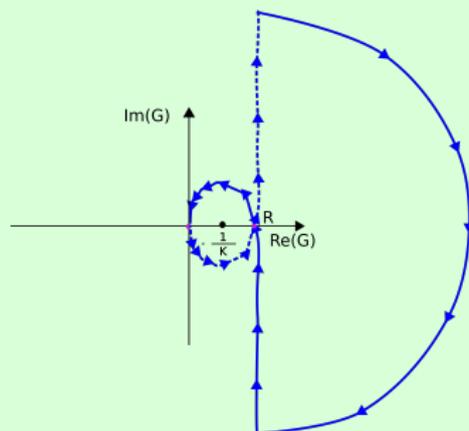
Exemplo 13 - continuação

O arco de circunferência de raio infinito permanece igual.



Exemplo 13 - continuação

O arco de circunferência de raio infinito permanece igual.

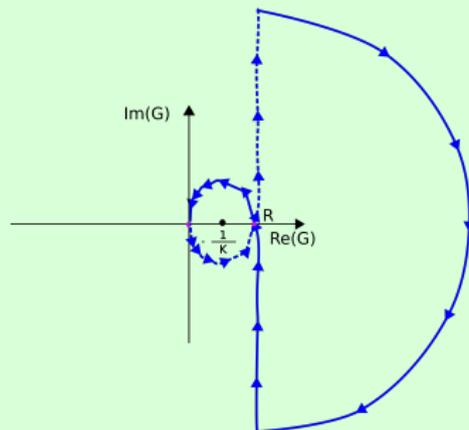


- $P = 2$: a única forma de estabilizar o sistema ($Z = N + P = 0$) é com $N = -2$ (duas voltas no sentido anti-horário);



Exemplo 13 - continuação

O arco de circunferência de raio infinito permanece igual.

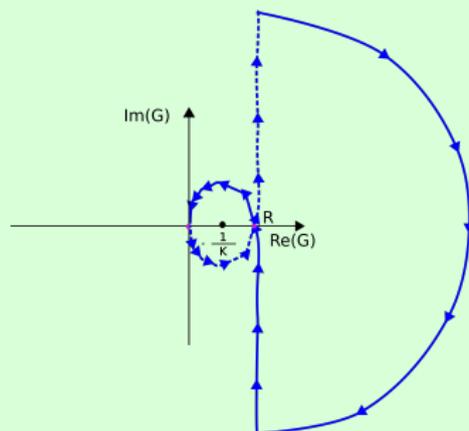


- $P = 2$: a única forma de estabilizar o sistema ($Z = N + P = 0$) é com $N = -2$ (duas voltas no sentido anti-horário);
- Isso nunca acontecerá, pois há no máximo uma volta no sentido anti-horário \Rightarrow sistema instável para qualquer valor de K ;



Exemplo 13 - continuação

O arco de circunferência de raio infinito permanece igual.



- $P = 2$: a única forma de estabilizar o sistema ($Z = N + P = 0$) é com $N = -2$ (duas voltas no sentido anti-horário);
- Isso nunca acontecerá, pois há no máximo uma volta no sentido anti-horário \Rightarrow sistema instável para qualquer valor de K ;
- Pode ter 1, 2 ou 3 polos de MF no SPD.



Margem de ganho no Diagrama de Nyquist

- Em implementações práticas, é possível que se tenha um erro no ganho do sistema com relação ao valor de projeto;
- Interessante ter uma medida do “grau de estabilidade de um sistema”, isto é, quanto o ganho pode variar antes de tornar o sistema instável;
- A margem de ganho é o quanto falta para o ganho ser unitário na frequência em que a fase vale -180° .



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° , pois $G(0) = \frac{-z_1}{p_1 p_2} = < 0$.



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° , pois $G(0) = \frac{-z_1}{p_1 p_2} < 0$.
- Conforme $\omega \rightarrow \infty$, a fase vai para -90° , visto que os dois polos contribuem com -90° cada, mas o zero contribui com $+90^\circ$.



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° , pois $G(0) = \frac{-z_1}{p_1 p_2} < 0$.
- Conforme $\omega \rightarrow \infty$, a fase vai para -90° , visto que os dois polos contribuem com -90° cada, mas o zero contribui com $+90^\circ$.
- Como o $|p_1| < |z_1|$, a fase começa a decrescer primeiro, ficando menor do que -180° .



Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° , pois $G(0) = \frac{-z_1}{p_1 p_2} < 0$.
- Conforme $\omega \rightarrow \infty$, a fase vai para -90° , visto que os dois polos contribuem com -90° cada, mas o zero contribui com $+90^\circ$.
- Como o $|p_1| < |z_1|$, a fase começa a decrescer primeiro, ficando menor do que -180° .
- Depois, como $|z_1| < |p_2|$, passa a aumentar, retornando a -180° .



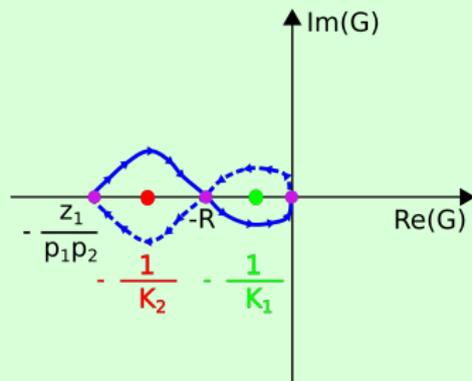
Example 14.

$$G(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)}, \quad z_1 < 0, p_1 < 0, p_2 > 0, |p_1| < |z_1| < |p_2|. \quad (31)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° , pois $G(0) = \frac{-z_1}{p_1 p_2} < 0$.
- Conforme $\omega \rightarrow \infty$, a fase vai para -90° , visto que os dois polos contribuem com -90° cada, mas o zero contribui com $+90^\circ$.
- Como o $|p_1| < |z_1|$, a fase começa a decrescer primeiro, ficando menor do que -180° .
- Depois, como $|z_1| < |p_2|$, passa a aumentar, retornando a -180° .
- Finalmente, por causa de p_2 , vai a -90° .



Exemplo 14 - continuação



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.
- Como em MA há um polo no SPD, $P = 1$.



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.
- Como em MA há um polo no SPD, $P = 1$.
- Para estabilidade, deve-se ter $Z = P + N = 0 \Rightarrow N = -P = -1$ (uma volta em torno de $-1/K$ no sentido anti-horário).



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.
- Como em MA há um polo no SPD, $P = 1$.
- Para estabilidade, deve-se ter $Z = P + N = 0 \Rightarrow N = -P = -1$ (uma volta em torno de $-1/K$ no sentido anti-horário).
- Isso ocorrerá no caso em verde, com $0 < K_1 < 1/R$.



Exemplo 14 - continuação

- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.
- Como em MA há um polo no SPD, $P = 1$.
- Para estabilidade, deve-se ter $Z = P + N = 0 \Rightarrow N = -P = -1$ (uma volta em torno de $-1/K$ no sentido anti-horário).
- Isso ocorrerá no caso em verde, com $0 < K_1 < 1/R$.
- No caso vermelho, tem-se $1/R < K_2 < p_1p_2/z_1$, com uma volta no sentido horário, isto é, $N = 1 \rightarrow Z = N + P = 1 + 1 = 2$ (polos no SPD).



Exemplo 14 - continuação

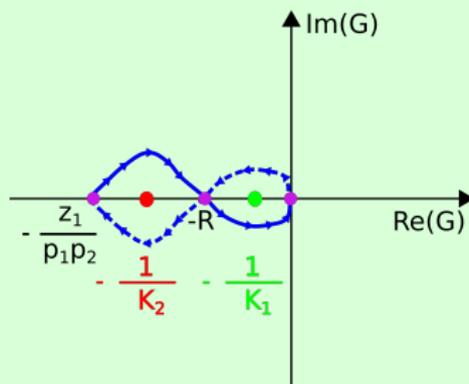
- No diagrama de Nyquist há dois cruzamentos com o eixo real no SPE.
- Um deles em $-z_1/p_1p_2$ e outro em $-R$.
- Como em MA há um polo no SPD, $P = 1$.
- Para estabilidade, deve-se ter $Z = P + N = 0 \Rightarrow N = -P = -1$ (uma volta em torno de $-1/K$ no sentido anti-horário).
- Isso ocorrerá no caso em verde, com $0 < K_1 < 1/R$.
- No caso vermelho, tem-se $1/R < K_2 < p_1p_2/z_1$, com uma volta no sentido horário, isto é, $N = 1 \rightarrow Z = N + P = 1 + 1 = 2$ (polos no SPD).
- Caso tenhamos $K > p_1p_2/z_1$ ou $K < 0$, então não há nenhuma volta em torno de $-1/K$; $N = 0 \rightarrow Z = N + P = 0 + 1 = 1$ (polo no SPD).



Exemplo 14 - continuação

Há limites tanto inferior quanto superior para o ganho de modo a manter o sistema estável: $0 < K_1 < 1/R$, de forma que $-1/K_1$ não cruze os pontos $s = 0$ e $s = -R$. Nesse caso, para um valor fixo de K nessa faixa, as margens de estabilidade são:

- ∞ : inferior (pois teríamos que dividir K por infinito para ficar igual a 0);
- $1/RK$: superior (multiplicando K por $1/RK$, então $-1/K = -R$).



Margem de fase no Diagrama de Nyquist

- Uma segunda possibilidade para instabilizar o sistema pode se referir ao sinal estar defasado;
- Uma medida de “tolerância à defasagem”, isto é, quanto o sinal pode estar defasado antes de tornar o sistema instável;
- A margem de fase é o quanto falta para a fase valer -180° quando o ganho é unitário.



Example 15.

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+5)(s+2)(s-1)}. \quad (32)$$



Example 15.

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+5)(s+2)(s-1)}. \quad (32)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.



Example 15.

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+5)(s+2)(s-1)}. \quad (32)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° .



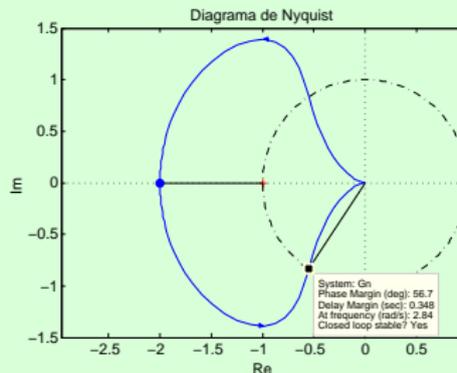
Example 15.

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+5)(s+2)(s-1)}. \quad (32)$$

- O sistema é estritamente próprio: $|G(s)| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.
- A fase inicialmente é -180° .
- Conforme $\omega \rightarrow \infty$, a fase vai para -180° , visto que os três polos contribuem com -90° cada, mas o zero contribui com $+90^\circ$.



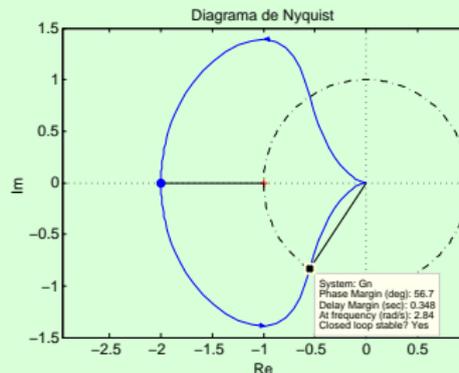
Exemplo 15 - continuação



- A margem de fase pode ser vista à partir do ponto de cruzamento da circunferência de raio unitário com o diagrama de Nyquist;



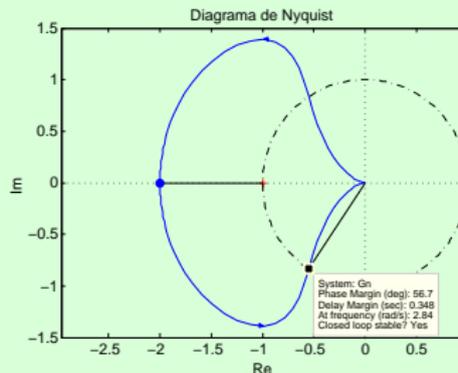
Exemplo 15 - continuação



- A margem de fase pode ser vista à partir do ponto de cruzamento da circunferência de raio unitário com o diagrama de Nyquist;
- Caso a fase seja diminuída desta quantidade, o número de voltas em torno de -1 mudará de $N = -1$ para $N = 0$;



Exemplo 15 - continuação



- A margem de fase pode ser vista à partir do ponto de cruzamento da circunferência de raio unitário com o diagrama de Nyquist;
- Caso a fase seja diminuída desta quantidade, o número de voltas em torno de -1 mudará de $N = -1$ para $N = 0$;
- Como $P = 1$, isso resultará no número de polos de MF no SPD mudando de $Z = 0$ para $Z = 1$, torando o sistema instável.



Atraso de tempo: efeito na estabilidade

O atraso de transporte de δ unidades de tempo no sinal de entrada da função de transferência $G_n(s)$ corresponde à multiplicação de da função de transferência pelo fator $e^{-\delta s}$:

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s}, \quad (33)$$

em que $G_n(s)$ é a função de transferência sem considerar o atraso.



Substituindo $s = j\omega$, a parte $G_n(s)$ da função de transferência que é uma razão de polinômios permanecerá sendo aquela que seria se não houvesse o atraso. Porém, o termo $e^{-\delta j\omega}$ aparecerá multiplicando, assim:

$$|G(j\omega)| = |G_n(j\omega)| |e^{-j\delta\omega}| = |G_n(j\omega)|, \quad (34)$$

pois, pela identidade de Euler:

$$e^{-j\delta\omega} = \cos(\delta\omega) - j\text{sen}(\delta\omega), \quad (35)$$

donde

$$|e^{-j\delta\omega}| = \sqrt{\cos^2(\delta\omega) + \text{sen}^2(\delta\omega)} = 1. \quad (36)$$



Quanto à fase,

$$\angle G(j\omega) = \angle G_n(j\omega) + \angle e^{-j\delta\omega} = \angle G_n(j\omega) - \delta\omega. \quad (37)$$

Isso porque, novamente recorrendo à identidade de Euler:

$$\begin{aligned} \angle e^{-j\delta\omega} &= \arctan \frac{\operatorname{Im} \{ e^{-j\delta\omega} \}}{\operatorname{Re} \{ e^{-j\delta\omega} \}} = \arctan \frac{-\operatorname{sen}(\delta\omega)}{\operatorname{cos}(\delta\omega)} \\ &= \arctan(-\tan \delta\omega) = -\delta\omega. \end{aligned} \quad (38)$$



Example 16.

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s + 0,1)(s + 1)}e^{-0,2s}. \quad (39)$$



Example 16.

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s + 0,1)(s + 1)}e^{-0,2s}. \quad (39)$$

- A fase em $s = 0$ é 0 e o módulo vale 40;



Example 16.

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s+0,1)(s+1)}e^{-0,2s}. \quad (39)$$

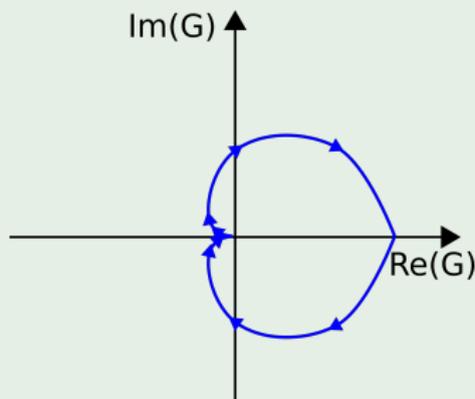
- A fase em $s = 0$ é 0 e o módulo vale 40 ;
- Conforme ω varia de 0 a $+\infty$, a fase vai a -180° ;
- O sistema é estritamente próprio, o que faz com que o módulo seja 0 para $\omega \rightarrow \infty$.



Example 16.

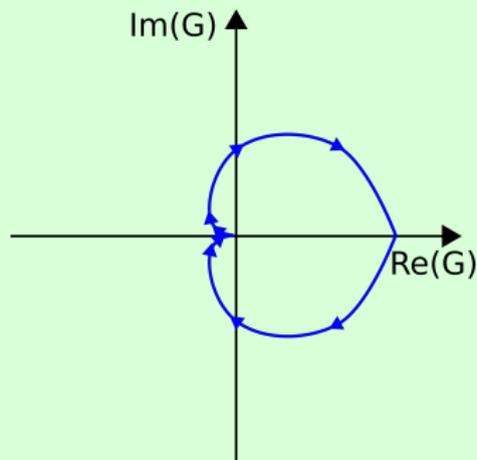
$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s+0,1)(s+1)}e^{-0,2s}. \quad (39)$$

- A fase em $s = 0$ é 0 e o módulo vale 40;
- Conforme ω varia de 0 a $+\infty$, a fase vai a -180° ;
- O sistema é estritamente próprio, o que faz com que o módulo seja 0 para $\omega \rightarrow \infty$.



Exemplo 16 - continuação

$$G(s) = G_n(s)e^{-\delta s} = \frac{4}{(s + 0,1)(s + 1)}e^{-0,2s}. \quad (40)$$

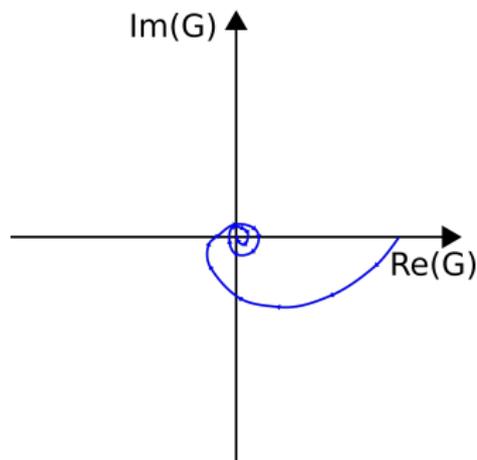


Não há cruzamento do eixo real negativo \Rightarrow ganho positivo jamais instabilizará o sistema em MF.



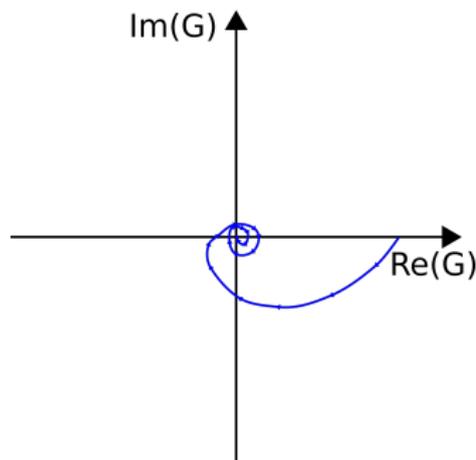
Esboço do diagrama de Nyquist com atraso

- À medida que o módulo se aproxima de 0, a fase diminui monotonicamente \Rightarrow o diagrama polar dá infinitas voltas e torno da origem;



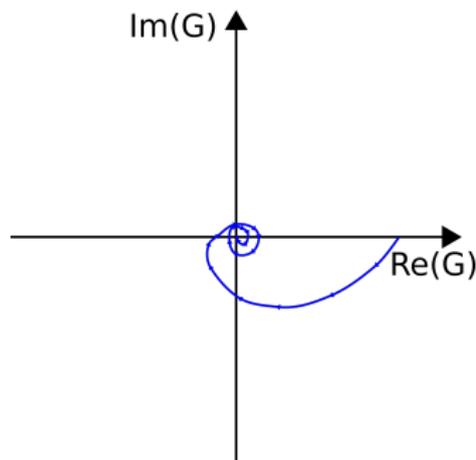
Esboço do diagrama de Nyquist com atraso

- À medida que o módulo se aproxima de 0, a fase diminui monotonicamente \Rightarrow o diagrama polar dá infinitas voltas e torno da origem;
- Há valores de K a partir dos quais há de uma até infinitas voltas em torno de $-1/K$;



Esboço do diagrama de Nyquist com atraso

- À medida que o módulo se aproxima de 0, a fase diminui monotonicamente \Rightarrow o diagrama polar dá infinitas voltas e torno da origem;
- Há valores de K a partir dos quais há de uma até infinitas voltas em torno de $-1/K$;
- O sistema que era estável para qualquer ganho positivo foi instabilizado para K “grande” por conta do atraso.

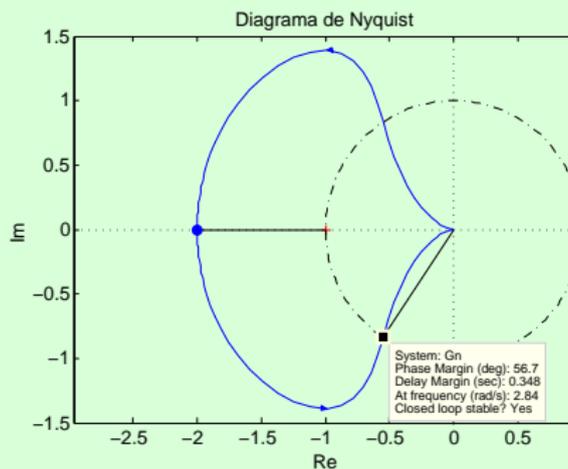


Exemplo 15 - continuação

Tem-se, para o exemplo 15, que

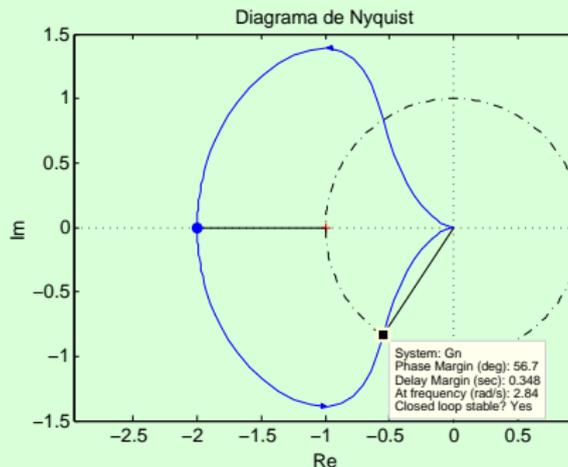
$$G_n(s) = \frac{20(s+1)}{(s+5)(s+2)(s-1)}, \quad (41)$$

o que resulta na margem de fase $PM = 56,7^\circ$:



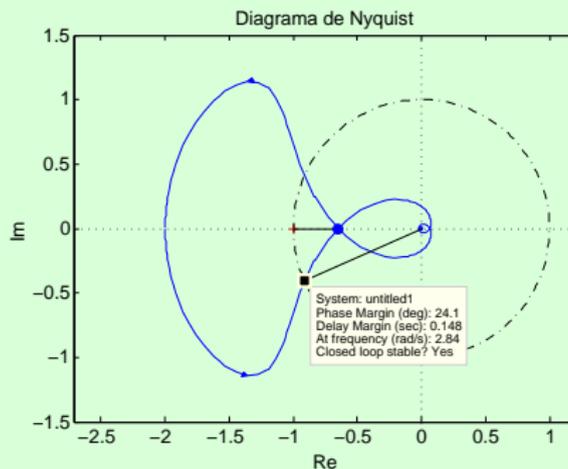
Exemplo 15 - continuação

Considerando um atraso de tempo de $\delta = 0,2$ s, a margem de fase é reduzida para $PM' = PM - \delta\omega = 56,7 - 0,2 \times 2,84 \times \frac{180}{\pi} = 24,1^\circ$:



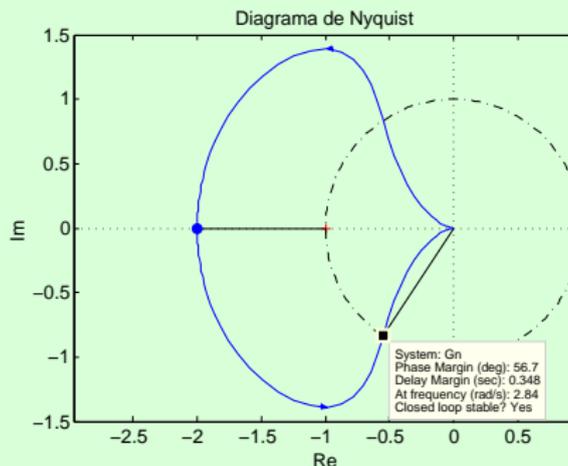
Exemplo 15 - continuação

Considerando um atraso de tempo de $\delta = 0,2$ s, a margem de fase é reduzida para $PM' = PM - \delta\omega = 56,7 - 0,2 \times 2,84 \times \frac{180}{\pi} = 24,1^\circ$:



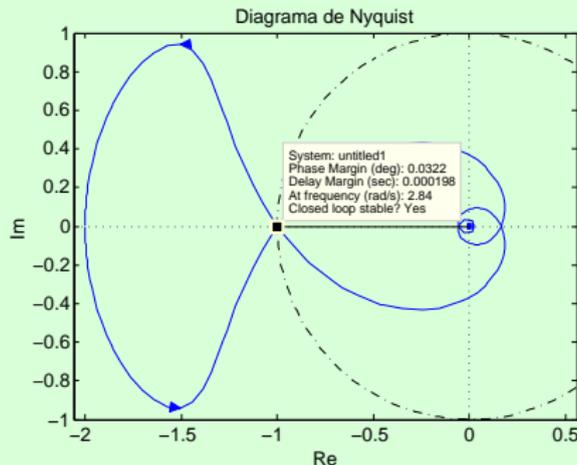
Exemplo 15 - continuação

Considerando um atraso de tempo limítrofe de $\delta = 0,348$ s, a margem de fase é reduzida para $PM'' = PM - \delta\omega = 56,7 - 0,348 \times 2,84 \times \frac{180}{\pi} \approx 0$ (isto é, o sistema em MF encontra-se próximo à instabilidade):



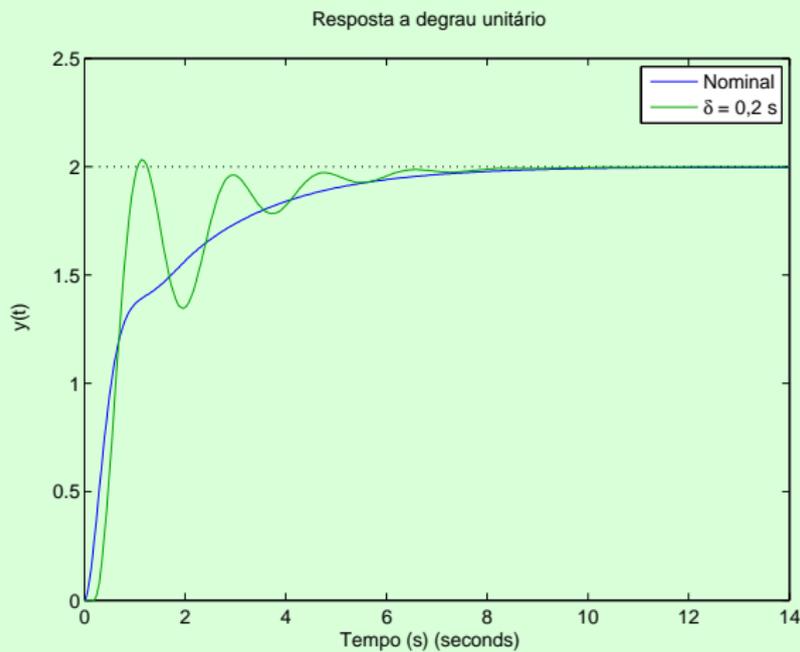
Exemplo 15 - continuação

Considerando um atraso de tempo limítrofe de $\delta = 0,348$ s, a margem de fase é reduzida para $PM'' = PM - \delta\omega = 56,7 - 0,348 \times 2,84 \times \frac{180}{\pi} \approx 0$ (isto é, o sistema em MF encontra-se próximo à instabilidade):



Exemplo 15 - continuação

Respostas a uma entrada degrau para o sistema em MF:



Exemplo 15 - continuação

Respostas a uma entrada degrau para o sistema em MF:

