Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 7 - Tipos de sistemas e erro em regime permanente

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

13 de março de 2018

Motivação

- Um dos primeiros requisitos que se estabelece para um sistema de controle refere-se ao seguimento de um sinal de referência $r(t)$;
- O comportamento da variável de saída $y(t)$ após um determinado tempo de aplicação da entrada de referência $r(t)$ é de particular interesse, como no caso de ajuste de temperatura de um forno, ajuste de velocidade de uma aeronave, posicionamento de um braço robótico, entre outros;
- Este valor é chamado de valor em **regime permanente** da variável e seu requisito é expresso em termos de um **erro em regime** permanente máximo aceitável.

Valor de um sinal em regime permanente

- Se o denominador da transformada de Laplace de um sinal tiver todos os polos no SPE a menos de um deles, que pode estar em $s = 0$, este sinal convergirá para um valor real;
- Neste caso, podemos aplicar o teorema do valor final para obter o valor em regime permanente deste sinal.

Example 1.

Um sinal $Y(s) = \frac{3}{s(s^2+s+2)}$ terá valor final igual a (note que duas raízes do denominador estão no SPE e uma é igual a 0):

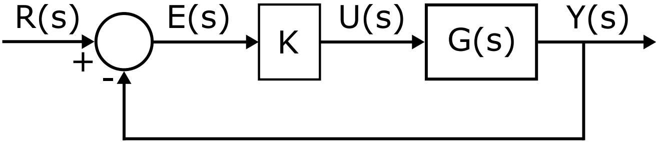
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

De fato, expandindo em frações parciais pode-se determinar a resposta $y(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$.

Erro em regime

O erro em regime consiste no valor do erro $e(t)$ depois de um longo tempo de aplicação da referência $r(t)$. Para uma malha de controle com realimentação negativa unitária sabemos que:

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}R(s). \tag{2}$$



Com isso, pode-se calcular $E(s)$ como:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \left[1 - \frac{KG(s)}{1+KG(s)}\right]R(s) = \underbrace{\frac{1}{1+KG(s)}}_{F(s)}R(s). \tag{3}$$

Entradas de interesse

Algumas entradas de interesse para sistemas de controle são:

1. Degrau: $R(s) = \frac{1}{s}$;
2. Rampa: $R(s) = \frac{1}{s^2}$;
3. Parábola: $R(s) = \frac{1}{s^3}$.

Para estas entradas é interessante calcular o erro em regime.

Erro em regime para entrada degrau

O erro em regime pode ser calculado substituindo $R(s) = \frac{1}{s}$ na expressão de $E(s)$ e usando o teorema do valor final (é necessário que o limite exista):

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+K\lim_{s\to 0} G(s)}. \quad (4)$$

Caso $G(s)$ não tenha nenhum polo na origem, teremos:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+KG(0)} = \frac{1}{1+K_p}, \quad (5)$$

em que K_p é a **constante de erro de posição**. Vale notar que quanto maior o ganho de malha DC (*Direct Current*, em referência a uma corrente estacionária direta em um circuito elétrico) dado por $K_p = KG(0)$, menor será o erro em regime para uma entrada degrau. Caso haja um ou mais polos em zero, tem-se:

$$e(\infty) = 0. \quad (6)$$

Erro em regime para entrada rampa

O erro em regime pode ser calculado substituindo $R(s) = \frac{1}{s^2}$ na expressão de $E(s)$ e usando o teorema do valor final (é necessário que o limite exista):

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{K\lim_{s\to 0} sG(s)}. \tag{7}$$

Caso $G(s)$ não tenha nenhum polo na origem, teremos:

$$e(\infty) \to \infty, \tag{8}$$

isto é, a saída não consegue acompanhar a rampa e o erro aumenta cada vez mais.

Caso haja um polo em zero, tem-se:

$$e(\infty) = \frac{1}{K\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}, \tag{9}$$

em que K_v é a **constante de erro de velocidade**. Vale notar que quanto maior K_v, menor será o erro em regime para uma entrada rampa.

Erro em regime para entrada parábola

O erro em regime pode ser calculado substituindo $R(s) = \frac{1}{s^3}$ na expressão de $E(s)$ e usando o teorema do valor final (é necessário que o limite exista):

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s^3} = \frac{1}{K\lim_{s\to 0} s^2 G(s)}. \quad (11)$$

Caso $G(s)$ tenha um ou nenhum polo na origem, teremos:

$$e(\infty) \to \infty, \quad (12)$$

isto é, a saída não consegue acompanhar a parábola e o erro aumenta cada vez mais.
Caso haja dois polos em zero, tem-se:

$$e(\infty) = \frac{1}{K\lim_{s\to 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}, \quad (13)$$

em que K_a é a **constante de erro de aceleração**. Vale notar que quanto maior K_a, menor será o erro em regime para uma entrada parábola.

Tipo do sistema

Pudemos notar que o número de polos de $G(s)$ na origem desempenha um papel importante no erro em regime para as entradas degrau, rampa e parábola, muito comuns em sistemas de controle. Por isso, define-se o **tipo do sistema** através do número de polos do mesmo na origem em malha aberta (polos de $G(s)$). Assim, um sistema com N polos na origem é chamado sistema tipo N.
Resumindo:

Tabela: Erro em regime para entradas degrau, rampa e parábola conforme o tipo do sistema.

Entrada	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
Degrau $\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
Rampa $\frac{1}{s^2}$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
Parábola $\frac{1}{s^3}$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$