Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Divisão de Engenharia Eletrônica
Departamento de Sistemas e Controle
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Aula 8 - Especificações de desempenho para sistemas de controle automático

Rubens J M Afonso

EES-10: Sistemas de Controle I

13 de março de 2018

Motivação

- Requer-se que um sistema de controle em malha fechada apresente comportamento medido em termos de sua resposta temporal;
- Descrito através de um ou mais **requisitos** sobre a resposta, especificando faixas de valores desejáveis para aspectos selecionados;
- Por exemplo, o erro em regime estacionário pode ser uma característica do sistema de controle em malha fechada: pode-se imaginar um requisito de precisão da resposta que coloque um valor máximo admissível para o valor absoluto de erro em regime.

Para obter essas especificações, usualmente se assume que a resposta temporal do sistema se assemelhe

1. à resposta temporal de um sistema de primeira ordem em malha fechada;
2. à resposta temporal de um sistema de segunda ordem em malha fechada.

Observação 1.

Caso o sistema seja de fato de primeira ou segunda ordem, os requisitos serão exatamente atendidos para os casos 1 e 2 acima, respectivamente. Caso não sejam, carecerão de aproximações: após projetar o controlador, este será simulado com o modelo de ordem maior para verificar a qualidade da aproximação e será reiterado, se necessário, com base nos resultados de simulação.

Entrada de referência adotada: degrau unitário

- Especificar uma entrada em comum para a referência: predominantemente usada é o **degrau unitário.**
- Principais especificações: erro em regime $e(\infty)$ ou e_{ss}, tempo de subida t_r, tempo de pico t_p, tempo de acomodação t_s e sobressinal (ou máxima ultrapassagem) M_p;
- Para sistemas de primeira ou segunda ordem: fórmulas exatas relacionando requisitos e parâmetros da função de transferência;

Resposta de sistemas de primeira ordem ao degrau

Um sistema de primeira ordem sem zeros pode ser representado de forma genérica pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A}{s+\sigma}. \tag{1}$$

Caso a entrada seja o degrau unitário, tem-se $R(s) = \frac{1}{s}$:

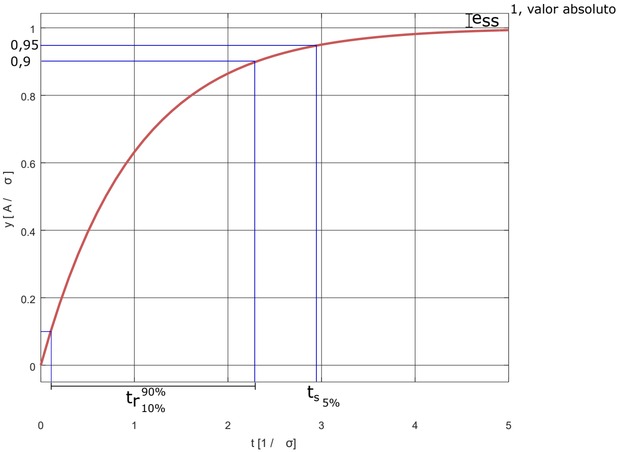
$$Y(s) = \frac{A}{s(s+\sigma)}, \tag{2}$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em:

$$y(t) = \frac{A}{\sigma}\left(1 - e^{-\sigma t}\right). \tag{3}$$

No gráfico de $y(t)$:

- $t_{r_{10\%}}^{90\%}$: tempo de subida de 10% a 90% do valor final;
- $t_{s5\%}$: tempo de acomodação a uma faixa de 5% do valor final;
- e_{ss}: erro em regime estacionário.



Podemos usar a equação (3) para determinar os valores de $t_{r_{10\%}}^{90\%}$, $t_{s5\%}$ e e_{ss} em função de A e σ:

$$t_{r_{10\%}}^{90\%} = \frac{\ln 0{,}9 - \ln 0{,}1}{\sigma} \approx \frac{2{,}2}{\sigma}, \tag{4}$$

$$t_{s5\%} = -\frac{\ln 0{,}05}{\sigma} \approx \frac{3}{\sigma}, \tag{5}$$

$$e_{ss} = \left|1 - \frac{A}{\sigma}\right|. \tag{6}$$

Observação 2.

Os tempos de subida e de acomodação podem ser calculados para outras faixas de maneira análoga ao que foi feito nas equações (4) *e* (5), *respectivamente.*

Observação 3.

O erro em regime estacionário pode ser determinado percentualmente também. Nesse caso, como a entrada tem amplitude unitária:

$$e_{ss}^{\%} = 100\left|1 - \frac{A}{\sigma}\right|. \tag{7}$$

Resposta de sistemas de segunda ordem ao degrau

Um sistema de segunda ordem sem zeros pode ser representado de forma genérica pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A}{s^2 + Bs + C}. \tag{8}$$

Caso o sistema tenha dois polos reais negativos distintos, tem-se:

$$G(s) = \frac{A}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}. \tag{9}$$

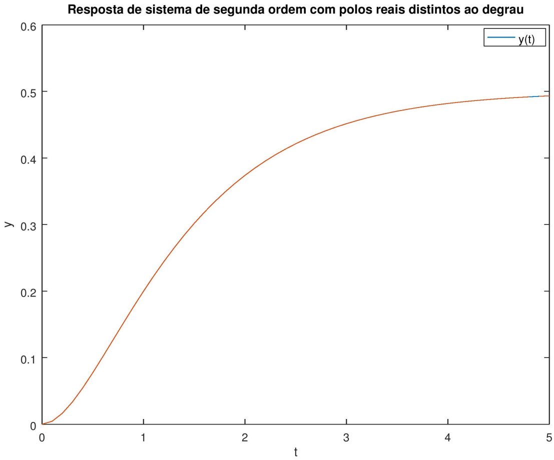
Se a entrada for o degrau unitário, tem-se $R(s) = \frac{1}{s}$, donde:

$$Y(s) = \frac{A}{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}, \tag{10}$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{A}{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)}e^{-\sigma_1 t} + \frac{A}{\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)}e^{-\sigma_2 t} \\ &= \frac{A}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_1-\sigma_2)}\left(\sigma_1-\sigma_2+\sigma_2 e^{-\sigma_1 t}-\sigma_1 e^{-\sigma_2 t}\right) \\ &= \frac{A}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_1-\sigma_2)}\left[\sigma_1\left(1-e^{-\sigma_2 t}\right)-\sigma_2\left(1-e^{-\sigma_1 t}\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

A resposta da equação (11) é semelhante à resposta do sistema de primeira ordem, então seu tratamento pode ser feito de maneira similar, e os índices de desempenho podem ser determinados em função de σ_1 e σ_2, de maneira implícita ou explícita.



Dois polos reais negativos de magnitude igual

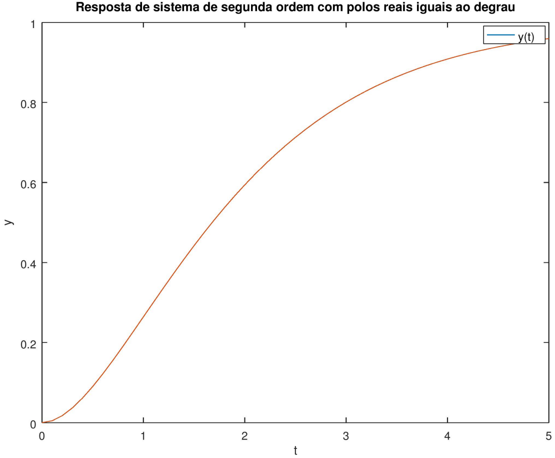
Caso os polos sejam reais e iguais, isto é, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

$$Y(s) = \frac{A}{s(s+\sigma)^2}, \tag{12}$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em:

$$\begin{aligned} y(t) =& \frac{A}{\sigma^2} - \frac{A}{\sigma^2} e^{-\sigma t} - \frac{A}{\sigma} t e^{-\sigma t} \\ =& \frac{A}{\sigma^2}\left(1 - e^{-\sigma t}\right) - \frac{A}{\sigma} t e^{-\sigma t} \end{aligned} \tag{13}$$

Tem-se uma resposta de primeira ordem somada a uma resposta que que envolve o produto entre o tempo e a exponencial decrescente.



Dois polos complexos conjugados com parte real negativa

Polos complexos conjugados com parte real negativa:
$-\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n$, $0 < \xi < 1$:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{14}$$

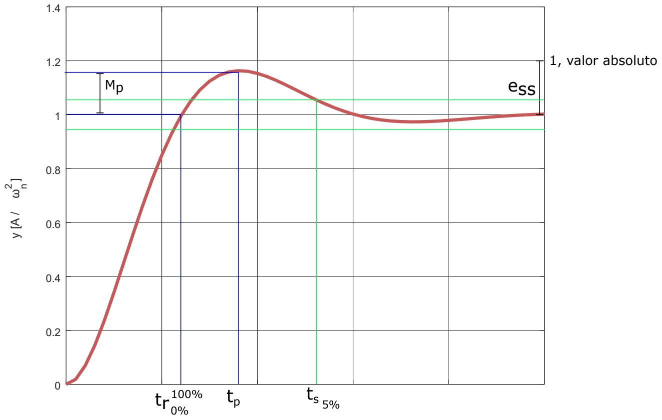
Se a entrada for o degrau unitário, tem-se $R(s) = \frac{1}{s}$, donde:

$$Y(s) = \frac{A}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}, \tag{15}$$

cuja transformada inversa de Laplace resulta em:

$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t \right) \right] \tag{16}$$

- ${t_r}_0^{100\%}$: tempo de subida de 0% a 100% do valor final;
- t_p: instante de pico;
- $t_{s5\%}$: tempo de acomodação a uma faixa de 5% do valor final;
- M_p: máxima ultrapassagem com relação ao valor em regime estacionário;
- e_{ss}: erro em regime estacionário.



Tempo de subida

$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t} \underbrace{\left[\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right)\right]}_{=0}$$

- Primeira vez em que se atinge o valor de regime estacionário.

$$\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_{r0}^{100\%}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_{r0}^{100\%}\right) = 0 \tag{17}$$

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_{r0\%}^{100\%} + \arccos\xi\right) = 0$$

$$\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_{r0\%}^{100\%} + \arccos\xi = \pi \Rightarrow t_{r0}^{100\%} = \frac{\pi - \arccos\xi}{w_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Tempo de pico

$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2} - \frac{A}{\omega_n^2} e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) \right]$$

Derivando com respeito ao tempo e igualando para encontrar o instante em que o valor de $y(t)$ é máximo:

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{\omega_n^2} \left\{ \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) \right] \right. \tag{18}$$

$$\left. + \omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left[\sqrt{1-\xi^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) - \xi \cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t\right) \right] \right\}.$$

Donde:

$$\dot{y}(t_p) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t_p\right) = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}. \tag{19}$$

Substituindo este valor de t_p da equação (19) na equação (16) encontra-se o valor de pico da saída:

$$y(t_p) = \frac{A}{\omega_n^2}\left(1 + e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right). \tag{20}$$

Desta forma, a máxima ultrapassagem relativa ao valor em regime estacionário é:

$$M_p = \frac{y(t_p) - \frac{A}{\omega_n^2}}{\frac{A}{\omega_n^2}} \Rightarrow M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \tag{21}$$

O tempo de acomodação pode ser **estimado** a partir da envoltória $e^{-\xi\omega_n t}$, quando esta atinge o valor b, em que b é o valor relativo da faixa desejada em torno do valor em regime estacionário. Por exemplo, para $b = 0{,}05$, tem-se:

$$t_{s_{5\%}} = \frac{\ln 0{,}05}{-\xi\omega_n} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}. \tag{22}$$

Observação 4.

O valor na Equação (22) *é aproximado, visto que se pode reescrever a Equação* (16) *como:*

$$y(t) = \frac{A}{\omega_n^2}\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t + \mathrm{arccos}\,\xi\right)\right\}, \qquad (23)$$

em que se usou o fato de que $\xi \in [0, 1]$*. Dessa forma, nota-se que a envoltória do termo que senoidal que oscila em torno do valor da referência é*

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}. \qquad (24)$$

Observação 4 - continuação

Com isto, pode-se garantir que a saída fica em torno de uma faixa de largura b (de maneira conservadora) usando o fato de que $\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \arccos\xi\right) \in [-1, 1]$ e impondo:

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_{s_b}}}{\sqrt{1-\xi^2}} = b, \tag{25}$$

donde:

$$t_{s_b} = \frac{\left|\ln\left(b\sqrt{1-\xi^2}\right)\right|}{\xi\omega_n}. \tag{26}$$

Em geral, utiliza-se a versão aproximada:

$$t_{s_b} \approx \frac{|\ln(b)|}{\xi\omega_n}. \tag{27}$$

Observação 4 - continuação

Em particular:

$$t_{s_{5\%}} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}.$$

$$t_{s_{2\%}} \approx \frac{4}{\xi\omega_n}.$$

$$t_{s_{1\%}} \approx \frac{4{,}6}{\xi\omega_n}.$$

Erro em regime

Finalmente, o valor do erro em regime estacionário pode ser calculado como

$$e_{ss} = \left| 1 - \frac{A}{\omega_n^2} \right|. \tag{28}$$

Observação 5.

ξ é chamado de fator de amortecimento, pois indica a razão entre a parte real dos polos e seu módulo, aparecendo como um fator multiplicativo na exponencial envoltória decrescente que amortece as oscilações do sistema.

Observação 6.

ω_n é chamada de frequência natural, pois indica a frequência de oscilação caso não haja amortecimento, correspondendo ao módulo dos polos complexos.

Observação 7.

O produto $\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = \omega_d$ *é chamado de frequência amortecida, pois indica a frequência de oscilação com o amortecimento, correspondendo à parte imaginária dos polos complexos.*

Observação 8.

O sobressinal M_p *muitas vezes é especificado de maneira percentual, bem como o erro em regime estacionário* e_{ss}*.*

Considerações finais

- Podemos mapear requisitos de comportamento em regime transitório a posições de polos desejados da função de transferência em malha fechada $T(s)$;
- Resta manipular um ganho K em cascata com a função de transferência $G(s)$ do sistema em malha aberta de forma que a função de transferência $T(s)$ apresente os polos desejados $\Rightarrow$ atendimento aos requisitos de projeto.